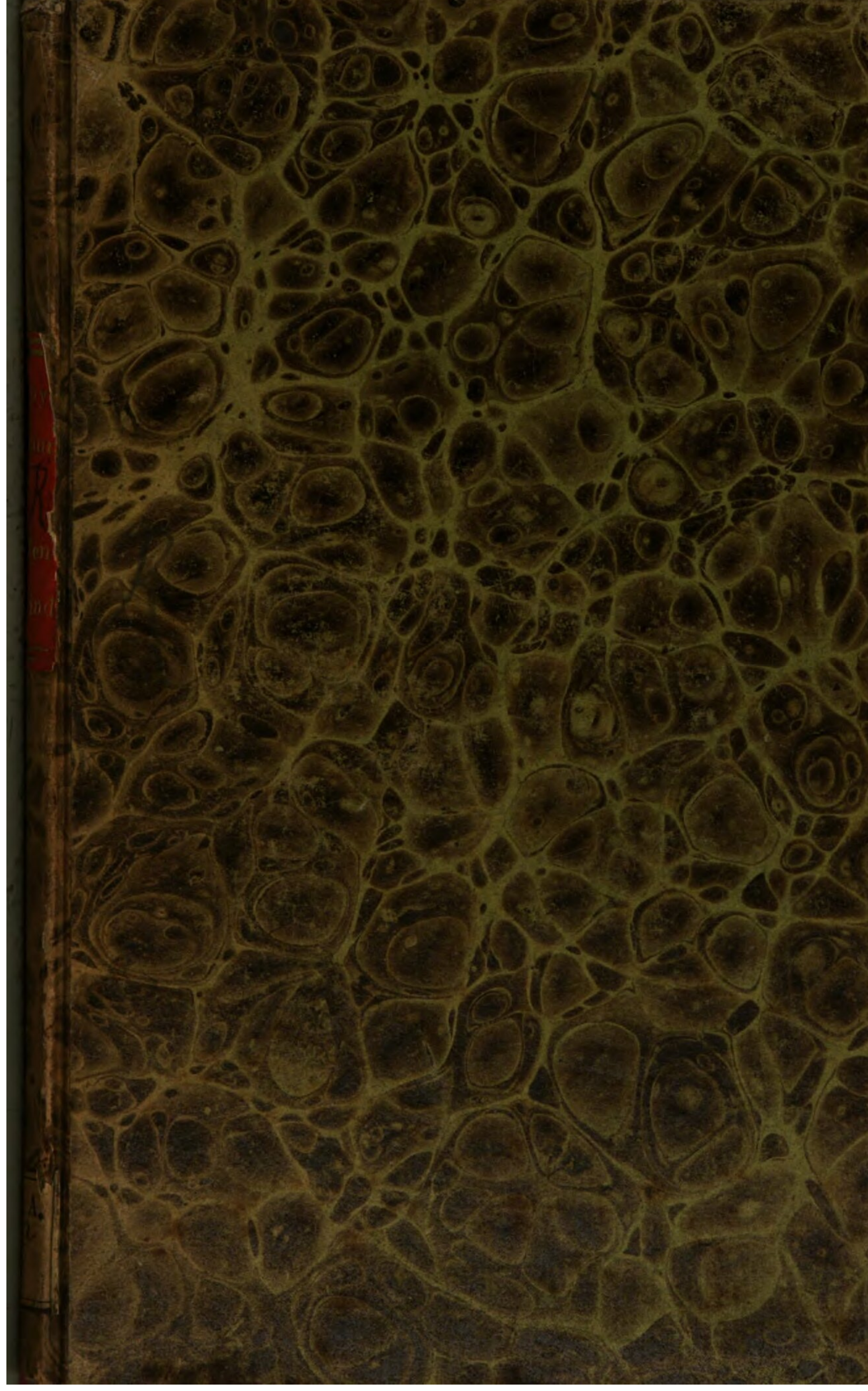
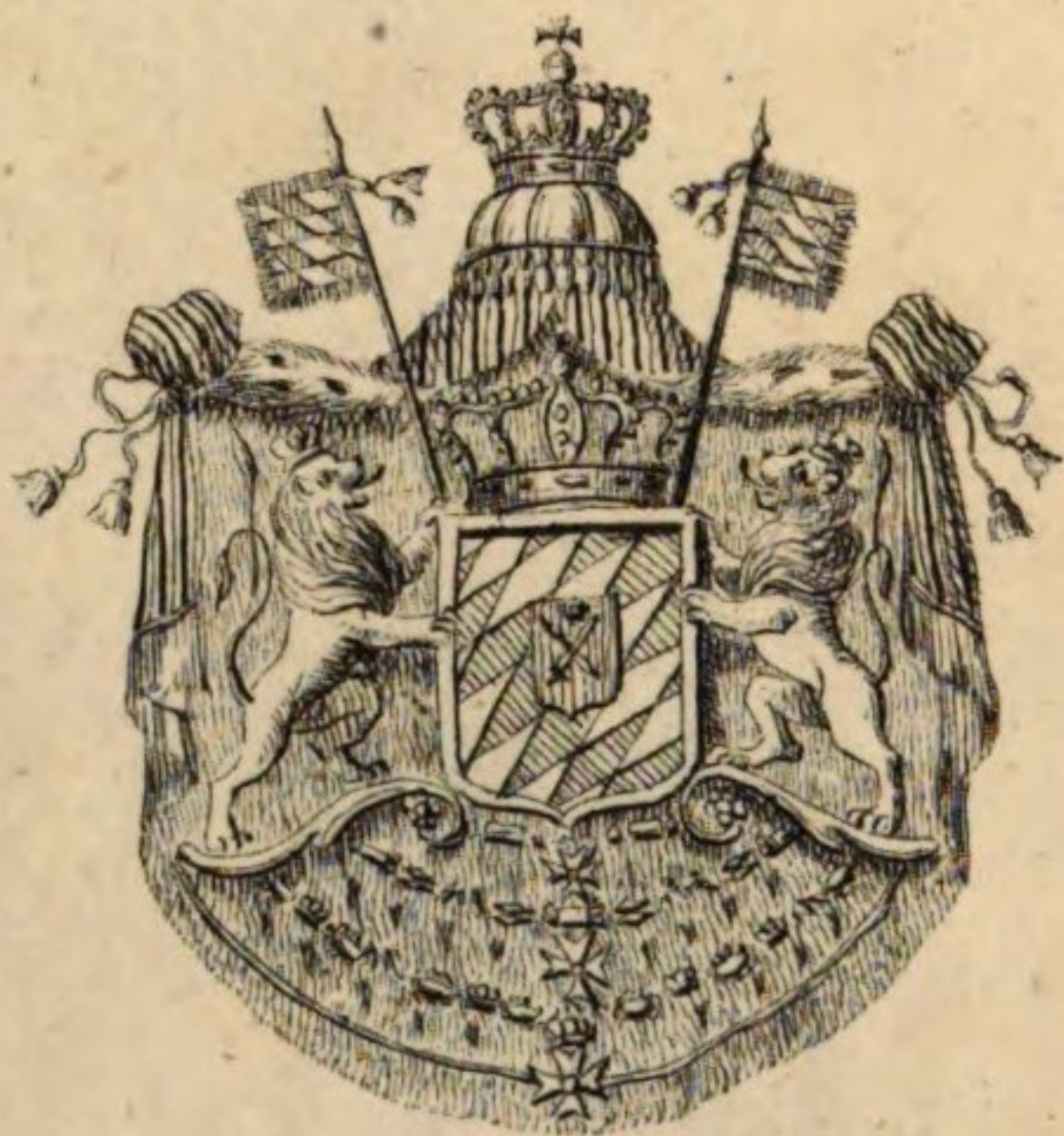






**BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.**

<36606367250016



<36606367250016

Bayer. Staatsbibliothek

Math A. 53 11

R

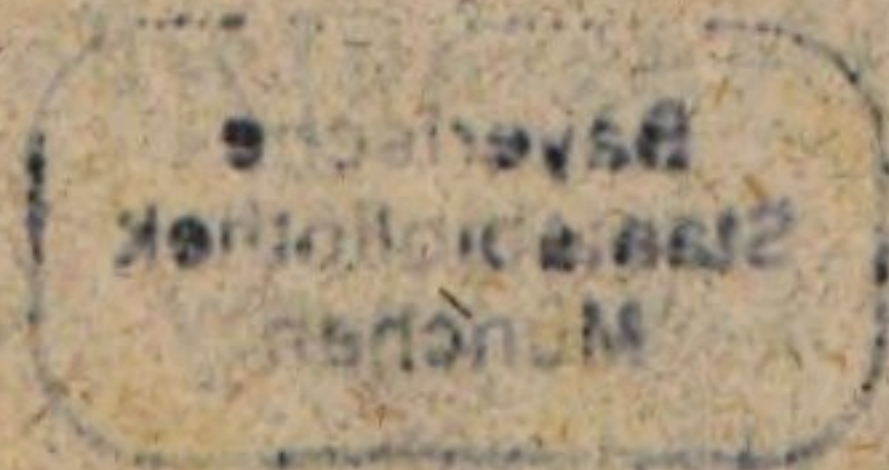
5
Weitere
Entwicklung und Anwendung
des Gesetzes
der
virtuellen Geschwindigkeiten
in

mechanischer und statischer Hinsicht

von

Grafen G. von Buquoy.

Erster Theil.



Leipzig, 1814.
bei Breitkopf und Härtel

184. C.

Handwritten signature: J. C. Schönbach

Handwritten signature: Schönbach

177
Entstehung
des Gesetzes
der
vürtheilten
die hiesiger und
Grafen C. von
H. H.
B. H.
Bayerische
Staatsbibliothek
München

V o r r e d e.

In dieser Schrift wird die Lehre, welche in dem von mir im Jahr 1812 bekannt gemachten Aufsatze: Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten u. s. w. nur sehr kurz vorgetragen wurde, mit mehrerer Deutlichkeit und mit den nothwendigen Bemerkungen versehen, ausein-

ander gesetzt; dann werden Anwendungen hievon auf die wichtigsten Lehrsätze der Dynamik und der physischen Astronomie gemacht, und zwar ist die Anwendung der ersten Art, in diesem I. Theile, und jene der zweiten Art, im II. Theile, welcher diesem nachfolgen soll, enthalten.

Damit diese Schrift ein für sich bestehendes Ganzes ausmachen möge, sind die ersten Paragraphe aus der erwähnten analytischen Bestimmung mit eingerückt worden. So dass, rücksichtlich des hier vorgetragenen Lehrsatzes der virtuellen Geschwindigkeiten Alles enthalten ist, und nur auf einzelne Anwen-

dungen desselben wird sich zuweilen auf die analytische Bestimmung u. s. w. berufen.

Die Paragraphe i bis 20 enthalten den Lehrsatz der virtuellen Geschwindigkeiten für jeden dynamischen Zustand mit den dazu gehörigen Erläuterungen und Bemerkungen. Hier wird auf keinen bisher bekannten Grundsatz der Statik oder Mechanik gebaut, sondern die vorgetragene Lehre steht für sich allein da, sie ist unabhängig von allen fremden dynamischen Grundsätzen unmittelbar aus sich selbst auf dem Wege der Analyse bewiesen. Der Gegenstand wird hier so-

gleich in seiner grössten Allgemeinheit betrachtet. Es wird nämlich von dem allgemeinen dynamischen Zustande ausgegangen, und der statische Zustand wird bloß als ein einzelner Fall des dynamischen überhaupt angesehen.

Die Anwendung dieses Lehrsatzes geschieht, um diese Schrift möglichst abzukürzen, bloß auf jene Sätze, wobei entweder die Auflösungsmethode selbst eine vorzügliche Aufmerksamkeit verdient, oder wobei neue Ansichten und Behauptungen als Resultate hervorgehen. Diese Anwendung bezieht sich vorzüglich auf folgende Gegenstände:

Die statische Theorie des Hebels mit
der grössten Allgemeinheit.

Das Parallelogramm der Kräfte so-
wohl als der Geschwindigkeiten.

Der Schwerpunkt (hier wird sich auf
die analytische Bestimmung
berufen).

Die absolute und relative Festigkeit
nur im Vorübergehen.

Die Bewegung auf vorgeschriebenen
Wegen, nach einer sehr allgemeinen Me-
thode, wovon die Theorie des Pendels,
das Gleiten und Rollen über gekrümmte

VIII

Flächen blosse Anwendungen sind: Hier möchten einige neue Resultate enthalten seyn. Dann folgt die allgemeinste Ansicht über die Benützung der Trägheitsmomente für die Annäherung zur gleichförmigen Bewegung, wovon die Theorie des Schwungrades eine einzelne Anwendung ist. Ferner wird gezeigt, nach welchem Gesetze die Massen blos ihrer Trägheit gemäss sich dann bewegen müssen, wenn sie nicht mit gleichförmiger Bewegung fortlaufen können. Hier bestehen nämlich beschleunigte und verzögerte Bewegungen ohne irgend einer Ueberwucht. Diese Betrachtung ist meines Wissens ganz neu.

Die Betrachtung der totalen Bewegungsquantität, welche eine und dieselbe Kraft in verschiedenen Fällen hervorbringen kann. Diesen Gegenstand benenne ich den *Isodynamismus*; ich führe ihn bloß als eine Quelle weiterer Untersuchungen an, ohne mich hierin falls weiter einzulassen.

Die Kräfte von beschränktem Drucke und beschränkter Geschwindigkeit.

Der Beharrungsstand an Maschinen, und der von mir sogenannte mechanische *Cyclus*.

Die Lehre des mechanischen Moments der Kraft und der Last in dem ausgedehntesten Sinne dieses Wortes. Besteht immerwährendes Gleichgewicht zwischen den Kräften und Widerständen, so ist für jede beliebige Zeit die verrichtete Arbeit gleich dem Kraftaufwande. Besteht hingegen dieses Gleichgewicht nicht, ist jedoch ein Beharrungsstand vorhanden, so findet die Gleichheit zwischen Kraftaufwand und Arbeit für die Dauer jedes mechanischen *Cyclus* statt, welches auch dann noch wahr ist, wenn die materiellen Verbindungsstücke der Maschine hin und wieder bewegt werden müssen (wie z. B. bei Kunstgestängen),

jedoch nur dann, wenn die Bewegungsquantitäten dieser Verbindungsstücke bis zur Tilgung der Bewegung als Kraft an der Maschine benützt werden.

Die Betimmung der Relation zwischen dem Kraftaufwande und der verrichteten Arbeit, wenn letztere sich nicht bloß auf Ueberwältigung von Drucken (wie bei einer Mahlmühle), sondern zugleich auf Ueberwältigung der Trägheit der Massen (wie z. B. bei einem Schöpfrade) bezieht. Hievon geschieht eine Anwendung auf die Theorie des Wagens. Gelegentlich werden auch folgende zwei Vorschläge von

mir gemacht: eine neue Art von Gradrung (bei Salzsohlen), und eine neue Art von Fuhrwerk, das ich Cylinderfuhrwerk nenne.

Rücksichtlich der Theorie des Krummzapfens und jener des Stosses, wird sich blos auf die analytische Bestimmung berufen.

§. 1.

Bewegt sich ein Punkt, von einem Standpunkt a auslaufend, nach irgend einer geraden Richtung $a b$ um den Raum a , so hat er sich einer durch die Gerade $a b$ senkrecht gelegenen Ebene um den Abstand a genähert. Gedenkt man nun drei sich im Punkte a senkrecht schneidende Axen $a b'$, $a b''$, $a b'''$, und auf selbigen 3 senkrechte Ebenen B' , B'' , B''' , so hat sich der erwähntermassen bewegte Punkt den Ebenen B , B' , B'' , zu gleicher Zeit um die Räume a' , a'' , a''' , genähert, deren Werthe man erhält, wenn man durch den Endpunkt des Raumes a drei Ebenen legt, welche die Axen $a b'$, $a b''$, $a b'''$, senkrecht schneiden.

Hieraus ergiebt sich, dass man die, nach den Axen $a b'$, $a b''$, $a b'''$, von einem Punkte, welcher vom Punkte a ausgelaufen ist, und den Raum a nach der Richtung $a b$ beschrie-

ben hat, durchlaufenen Räume folgendermassen finden könne: Man fälle aus dem Endpunkte des Bewegungsraumes a , ... einen Perpendikel auf die Axe $a b'$, eben so verfare man mit jener $a b'$, eben so verfare man mit jener $a b''$, und mit jener $a b'''$, so sind die solchermassen erhaltenen Katheten, welche von den Axen $a b'$, $a b''$, $a b'''$, abgeschnitten werden, die gesuchten, nach diesen Axen durchlaufene Räume.

Das hier Gesagte gilt sowohl von der wirklichen Bewegung eines Punktes, als auch von dessen blosser Bestimmung zur Bewegung, daher von jedem dynamischen Bestreben eines Punktes. Denn ein solches dynamisches Bestreben kann sich nur auf eine bewegende Kraft oder auf eine Quantität der Bewegung beziehen. Im ersten Falle besteht die der bewegenden Kraft proportionale Bestimmung, nach der Richtung $a b$ in einer gegebenen Zeit den Raum a zu beschreiben, wodurch die Bestimmungen zu den Räumen a' , a'' , a''' , nach den Axen $a b'$,

ab'' , ab''' , Statt finden, welchen Räumen abermals bewegende Kräfte nach diesen Richtungen entsprechen müssen, die diesen Räumen proportional sind. Im zweiten Falle lässt sich das dynamische Bestreben der Masse m nach der Richtung ab durch die Länge ma ausdrücken, also nach jener ab' durch die Länge ma' u. s. w. Nun ist aber $ma : ma' = a : a'$, u. s. w.

§. 2.

Betrachtet man die Bewegung eines Systems von Punkten, welche gegeneinander in unverschiebbarem Zusammenhange stehen, so dass also die Bewegung dieser Punkte nunmehr im Raume, d. h. auf fixe Punkte bezogen, welche ausserhalb dieses Systems von Punkten liegen, vor sich gehen kann, so lässt sich jede solche Bewegung binnen jeder Zeit t , während welcher an den Ursachen der Bewegung nichts geändert wird, auf sechserlei abgesonderte Bewegungen reduzieren, nämlich: auf 3 rotatorische Bewegungen um 3 Axen, A , B , C , welche einander in einem gemein-

schaftlichen Punkte C schneiden, und welche Bewegungen sich dadurch angeben lassen, dass man die Bogen bestimmt, welche die Endpunkte L, L_+, L^+ , der auf besagte Axen gefällten Perpendikel von angenommener Länge, wofür man z. B. die Einheit wählt, beschreiben; ferner auf 3 fortschreitende Bewegungen des Punktes C nach 5 auf einander senkrechten Axen A, B, D . Was hier von der wirklichen Bewegung eines Systems von Punkten gesagt wurde, lässt sich auf dieselbe Art von jenem dynamischen Bestreben eines Systems von Punkten behaupten, das aus den individuellen dynamischen Bestrebungen der einzelnen Punkte des Systems entsteht, und das wird demnach das kombinierte dynamische Bestreben dieses Systems nennen wollen.

§. 3.

Denkt man sich mehrere Punkte a', a'', a''' , die unter einander nicht zusammenhängen, und deren jeder ein dynamisches Be-

streben d' , d'' , d''' , ... besitzt: so folgt jeder dieser Punkte ungehindert seinem dynamischen Bestreben. Sind hingegen diese dynamisch-affizirten Punkte unter einander im unverschiebbaren Zusammenhange, so muss hieraus ein kombinirtes dynamisches Bestreben für das ganze System von Punkten entstehen; und zugleich finden sich die einzelnen Punkte genöthigt, ihre individuellen dynamischen Bestrebungen nur mehr zum Theil zu befolgen, so dass, wenn das System diesem kombinierten Bestreben binnen einer Zeit t (während welcher an den individuellen Bestrebungsursachen nichts als verändert angenommen wird) in irgend einer der 6 Rücksichten (§. 2.) folgt, jeder Punkt seinem individuellen Bestreben nur zum Theil nachgiebt.

§. 4.

Bezeichnen wir nun durch D das kombinirte dynamische Bestreben des festen Systems bloß in einer der 6erlei Rücksichten

(§. 2.) z. B. in Rücksicht des Bestrebens für den Punkt C nach der Axe A ; nennen wir ferner R den binnen der Zeit t vom Punkte C (vermöge des Bestrebens D) nach der Axe A durchlaufenen Raum, und endlich $r', r'', r''', \dots$, die hiedurch (binnen derselben Zeit t) von den Punkten $a', a'', a''', \dots$, nach den Richtungen der dynamischen Bestrebungen $d, d', d'', \dots$ beschriebenen Räume, welche jene partialen Befolgungen der individuellen Bestrebungen sind, die der gleichzeitigen Befolgung des kombinierten dynamischen Bestrebens nach der angenommenen Rücksicht entsprechen, so sieht man aus §. 3. ein, dass D eine Funktion von $d, d', d'', \dots$, von $r, r', r'', \dots$, und von t seyn müsse,

$$D = F(d, d', d'', \dots, r, r', r'', \dots, t).$$

§. 5.

Schneidet man vom Punkte C aus, nach der Axe A , eine beliebige Linie S ab, und schneidet von den Punkten $a, a', a'', \dots$,

aus, nach den Richtungen der individuellen dynamischen Bestrebungen $d, d', d'', \dots$, jene Stücke $s, s', s'', \dots$, ab, worum die Angriffspunkte $a, a, a'', \dots$ der dynamischen Bestrebungen nach besagten Richtungen laufen möchten, wenn sie parallel zur Axe A die Räume $S, S, S, \dots$ beschrieben; so ist

$$R : r = S : s, R : r' = S : s', \dots, \text{also}$$

$$r = \frac{Rs}{S}, r' = \frac{Rs'}{S}, \dots, \text{also ist}$$

$$D = F\left(d, d', d'', \dots, \frac{Rs}{S}, \frac{Rs'}{S}, \frac{Rs''}{S}, \dots t\right),$$

in welcher Gleichung die R und t so verwebt seyn müssen, dass (in einem bestimmten Falle) für jeden Werth von t , und den diesem Werthe entsprechenden von R , obige Funktion unverändert dieselbe Grösse ausdrücken muss.

Bezeichnen wir für einen solchen bestimmten Fall, die Zeit t , als eine Funktion von R , durch $f(R)$, so erhalten wir die Gleichung

$$D = F\left(d, d', d'', \dots, \frac{Rs}{S}, \frac{Rs'}{S}, \frac{Rs''}{S}, \dots f(R)\right),$$

oder jene

$$D = f \left(d, d', d'', \dots, \frac{R s}{S}, \frac{R s'}{S}, \dots, R \right),$$

worinn R gar nicht vorkommen kann, da D von R nicht abhängen darf. Wir haben also die Gleichung

$$D = W (d, d', d'', \dots, s, s', s'', \dots, S),$$

woselbst S und $s, s', s'', \dots$ bloß geometrische Linien sind, die vom dynamischen Zustande des betrachteten Systems nicht abhängen, wo ferner S beliebig, und die Verhältnisse $\frac{S}{s}, \frac{S}{s'}, \frac{S}{s''}, \dots$, durch die Richtungen (bezogen auf die Axe A) der individuellen dynamischen Bestrebungen $d, d', d'', \dots$, bestimmt sind.

§. 6.

Wir wollen nunmehr die Form der hier angesetzten Funktion durch analytische Schlüsse genau bestimmen.

Wenn die Grössen $d, d', d'', \dots$ zu gleicher Zeit verschwinden, so muss auch das

kombinierte dynamische Bestreben D zu Null werden, und eben so, wenn die Grössen s , s' , s'' , ... zu gleicher Zeit verschwinden, so muss auch der Werth von D in denselben Fall kommen. Es muss demnach in obiger Funktion jedes Glied entweder d , oder d' , oder d'' , ..., und zugleich entweder s , oder s' , oder s'' , ... zum Faktor haben.

Hieraus folgt eine Gleichung von dieser Form:

$$D = \lambda (d, d', d'', \dots, s, s', s'', \dots S) d'' \cdot d''' + \\ + \gamma (d, d', d'', \dots s, s', s'', \dots S) d' \cdot s''' + \dots$$

§. 7.

Da für jenen Fall, wo d verschwindet, der Werth von s auf jenen von D keinen Einfluss mehr haben darf, da sich ganz dasselbe von den Werthen von d' , d'' , ... rücksichtlich jener von s' , s'' , ..., und da auch umgekehrt sich dasselbe von den Werthen von s , s' , ..., rücksichtlich der Werthe von d , d' , ... behaupten lässt: so kann s nur in jenen Gliedern vorkommen, wo d ein Fak-

tor ist; eben so kann s' nur in jenen Gliedern vorkommen, wo d' ein Faktor ist, und umgekehrt. Also die Form unserer Funktion folgende:

$$D = \varphi(d, s, S) d. s + \varphi'(d', s', S). d'. s' + \varphi''(d'', s'', S). d'' s'' + \dots$$

§. 8.

Dä ferner d und s , dann d' und s' , dann d'' und s'' alle auf einerlei Art in obiger Funktion verwebt seyn müssen, so folgt für die Form dieser Funktion die Gleichung

$$D = \varphi(d, s, S). d. s + \varphi(d', s', S). d'. s' + \varphi(d'', s'', S). d''. s'' + \dots$$

§. 9.

Nimmt man nun ein für allemal für S eine bestimmte Länge an, so lässt sich D folgendergestalt ausdrücken:

$$D = \psi(d, s). d. s + \psi(d', s'). d'. s' + \psi(d'', s''). d''. s'' + \dots$$

§. 10.

Setzt man für jenen Fall, wo z. B. drei individuelle dynamische Bestrebungen d , d' ,

d'' , ein kombinirtes dynamisches Bestreben
 bloß in Bezug des Punktes C nach der Axe
 A , bewirken, $D = \psi(d, s) \cdot d' \cdot s' + \psi(d', s') \cdot d \cdot s + \psi(d'', s'') \cdot d'' \cdot s''$ so wird $D = \psi(d, s) \cdot d \cdot s$, wenn man setzt, es verschwinden d' und d'' . Wird nun in diesem Falle bloß d geän-
 dert, z. B. es wird $d = md$, so wird $D = \psi(md, s) \cdot md \cdot s$; es ist aber dann dieser
 letzte Werth von D nothwendig m^{mal} so gross
 als der vorletzte, also ist

$\psi(md, s) \cdot md \cdot s : \psi(d, s) \cdot d \cdot s = m : 1$, woraus
 folgt $\psi(md, s) \cdot md \cdot s = \psi(d, s) \cdot md \cdot s$, also
 ist die Grösse d in dem Ausdrücke $\psi(d, s)$
 als d^0 enthalten. Daher lässt sich D so aus-
 drücken:

$$D = W(s) \cdot d \cdot s + W(s') \cdot d' \cdot s' + \\ + W(s'') \cdot d'' \cdot s'' + \dots$$

§. 11.

Besteht wieder nur ein individuelles dy-
 namisches Bestreben d , so ist das kombinirte
 dynamische Bestreben $D = W(s) \cdot d \cdot s$ nach
 der Axe A . Nehmen wir die Axe A einmal

in einer beliebigen Richtung an; und setzen dann $D = W(s) d. s$; einmal in der Richtung des Bestrebens d selbst, und setzen dann $\delta = \varphi(\sigma) d. \sigma$; so folgt (§. 1.) $D: \delta = \cos \mu: 1$, also $D = \delta. \cos \mu$. Ferner ist $s = S \cos \mu$, und $\sigma = S$, also ist $W(S \cos \mu). d. S \cos \mu = \varphi(S) d. S. \cos \mu$, daher $W(S \cos \mu) = \varphi(S)$; also $W(S)$ eine beständige Grösse. Daher lässt sich D so ausdrücken:

$$D = H. d. s + B. d'. s' + C. d''. s'' + \dots$$

§. 12.

Hier ist das kombinirte dynamische Bestreben D des Punktes C nach der Axe A durch die Summe der individuellen dynamischen Bestrebungen, welche nach der Axe A bestehen, ausgedrückt.

Das individuelle Bestreben d giebt nach $A = H. d. s$, jenes d' nach $A = B. d'. s'$ jenes d'' nach $A = C. d'' s''$ u. s. w. woraus leicht einzusehen ist, dass $H = B = C = \dots$ seyn müssen. Es ist also

$$D = H (d. s + d'. s' + d'' s'' + \dots).$$

§. 15.

Daher ist das kombinierte Bestreben in Bezug des Punktes C nach der Axe $A = 0$, d. h. es ist in dieser Rücksicht Gleichgewicht, wenn $d \cdot s + d' \cdot s' + d'' \cdot s'' + \dots = 0$ ist, und umgekehrt.

§. 14.

Es wurde hier bewiesen, dass für den Fall des Gleichgewichts des Punktes C nach der Axe A allemal die Gleichung $d \cdot s + d' \cdot s' + d'' \cdot s'' + \dots = 0$ Statt finden müsse, und umgekehrt, dass wenn $d \cdot s + d' \cdot s' + \dots = 0$ ist, eben erwähntes Gleichgewicht bestehen müsse.

Was hier vom Gleichgewichte des Punktes C nach der Axe A bewiesen wurde, lässt sich eben so vom Gleichgewichte dieses Punktes nach den Axen B und D darthun. Es lässt sich demnach das totale Gleichgewicht der fortschreitenden Bewegung durch folgende 3 Gleichungen ausdrücken:

$$\text{I. } ds + d's' + d''s'' + \dots = 0$$

$$\text{II. } ds_+ + d's'_+ + d''s''_+ + \dots = 0$$

$$\text{III. } ds^+ + d's'^+ + d''s''^+ + \dots = 0$$

§. 15.

Betrachtet man das kombinierte dynamische Bestreben des Systems in Bezug auf Rotation, nämlich jenes $\mathfrak{D}$ rücksichtlich des dynamischen Bestrebens des Punktes $\mathfrak{C}$ um die Axe $\mathfrak{A}$; eben so jenes $\mathfrak{D}_+$ rücksichtlich des Bestrebens des Punktes $\mathfrak{C}_+$ um die Axe $\mathfrak{B}$; endlich jenes $\mathfrak{D}^+$ rücksichtlich des Bestrebens des Punktes $\mathfrak{C}^+$ um die Axe $\mathfrak{D}$ nach denselben Grundsätzen, als eben das dreifache Bestreben des Punktes C betrachtet wurde; so überzeugt man sich sehr leicht, dass das kombinierte dynamische Bestreben in Bezug der Rotation um die Axe $\mathfrak{A}$ durch folgende Gleichung sich ausdrücken lasse:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{H} (d\mathfrak{f} + d'\mathfrak{f}' + d''\mathfrak{f}'' + \dots)$$

worinn $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \dots$ die von den Angriffspunkten $a, a', a'', \dots$ nach den Richtungen ihrer individuellen dynamischen Be-

strebungen zu gleicher Zeit beschriebenen Räume darstellen, welche jenen durch diese Angriffspunkte zu gleicher Zeit um die Axe $\mathfrak{A}$ beschriebenen Bögen entsprechen, welche Bögen von diesen Punkten dann beschrieben würden, wenn der Punkt $\mathfrak{C}$ um die Axe $\mathfrak{A}$ den Bogen $\mathfrak{S}$ beschreiben möchte.

Hier hängen also die Verhältnisse $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{f}}$, $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{f}'}$, $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{f}''}$, ... von den Richtungen der dynamischen Bestrebungen d , d' , d'' , und von den Lagen der Angriffspunkte dieser dynamischen Bestrebungen ab.

Um die Wahrheit dieser Behauptungen einzusehen, darf man blos die Paragraphe 4 bis 14 mit Beziehung auf Rotation durchgehen. Nur das in §. 11. Gesagte will ich für die Beziehung auf Rotation folgendermassen modificiren:

Bestehe nur ein individuelles dynamisches Bestreben d , so ist das kombinierte dynamische Bestreben in Bezug auf Rotation um die Axe $\mathfrak{A}$, nämlich $\mathfrak{D} = \omega (\mathfrak{f}). d.$ Ist

nun c der Abstand des Angriffspunktes des dynamischen Bestrebens d von der Axe $\mathcal{A}$: so lässt sich allemal f durch $c. \mathcal{S}. \cos \lambda$ ausdrücken. Erwäget man aber, dass mit diesem Falle jener als gleichgeltend angenommen werden darf, wo statt des dynamischen Bestrebens d an demselben Angriffspunkte die drey dynamischen Bestrebungen $d. \cos \alpha$, $d \cos \beta$, $d \cos \lambda$, bestünden (§. 1.), deren erstere zwei in der Ebene, und letzteres senkrecht auf der Ebene wirken möchten, welche Ebene man sich durch die Axe $\mathcal{A}$ und den Angriffspunkt gelegt vorstellen kann; erwäget man ferner, dass in diesem Falle bloss letzteres dynamisches Bestreben auf die Rotation um die Axe $\mathcal{A}$ wirken könne, und dass in diesem Falle die Grösse f den Werth $c. \mathcal{S}. \cos \lambda$ habe, so ergibt sich die Gleichung

$$\mathcal{D} = w (c. \mathcal{S}). d \cos \lambda. c \mathcal{S}, \text{ also ist}$$

$w (c. \mathcal{S}. \cos \lambda) d. c. \mathcal{S}. \cos \lambda = w (c. \mathcal{S}.) d. \cos \lambda. c. \mathcal{S}.$
daher $w (c. \mathcal{S}. \cos \lambda) = w (c. \mathcal{S}.)$, und folglich ist in dem Ausdrucke $w (f)$ die Grösse

$\mathfrak{f}$ dergestalt verwebet, dass sie darauf keinen Einfluss hat, also ist ω ($\mathfrak{f}$) konstant, u. s. w.

Diesem gemäss lässt sich das totale Gleichgewicht der rotatorischen Bewegung durch folgende 3 Gleichungen ausdrücken:

$$\text{IV. } d\mathfrak{f} + d'\mathfrak{f}' + d''\mathfrak{f}'' + \dots = 0$$

$$\text{V. } d\mathfrak{f}_+ + d'\mathfrak{f}'_+ + d''\mathfrak{f}''_+ + \dots = 0$$

$$\text{VI. } d\mathfrak{f}^+ + d'\mathfrak{f}'^+ + d''\mathfrak{f}''^+ + \dots = 0$$

§. 16.

Wer den Geist des hier Gesagten wohl gefasst hat, und den Sinn der Gleichungen I, II, III, IV, V, VI, wodurch das vollkommene Gleichgewicht eines von Kräften wie immer ergriffenen Systems von fest zusammenhängenden Punkten ausgedrückt wird, wohl versteht, ist im Stande folgendes statische Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, dessen sich Herr de la Grange in seiner *mechanique analytique* mit so glücklichem Erfolge bedient hat, zu fassen, und auf vorkommende Fälle anzuwenden.

„Wenn mehrere unverschiebbare zusammenhängende Punkte oder Körper $a, a', a'', \dots$, welche was immer für individuelle dynamische Bestrebungen $d, d', d'', \dots$ haben, so aufeinander wirken, dass ein Gleichgewicht erfolgt, so ergibt sich folgendes Gesetz: Man gedenke sich irgend eine Ursache, welche dieses Gleichgewicht aufhebe, so muss jeder Punkt oder Körper einen Raum durchlaufen, den wir seine virtuelle Geschwindigkeit (*vitesse virtuelle*) nennen wollen; hierdurch beschreiben die Punkte $a, a', a'', \dots$ bestimmte Räume $s, s', s'', \dots$ nach den Richtungen ihrer individuellen dynamischen Bestrebungen, welche sich nach (§. 1.) finden lassen. Man multiplizire diese Räume $s, s', s'', \dots$ durch die individuellen dynamischen Bestrebungen $d, d', d'', \dots$, indem man diese Räume $s, s', s'', \dots$ bejaht oder verneint nimmt, nachdem solche mit den individuellen dynamischen Bestrebungen der Punkte $a, a', a'', \dots$ in einerlei oder entgegengesetzten Richtungen aus-

fallen. Die Summe aller so entstehenden Produkte muss $= 0$ seyn.“

Man bemerke, dass in diesem Lehrsatz in Worten nur der Sinn einer der sechs Gleichungen I, II, III, IV, V, VI, ausgedrückt ist.

Aus der Bedeutung, in der hier der Ausdruck dynamisches Bestreben genommen wird, sieht man leicht ein, dass der eben angeführte Lehrsatz ganz dasselbe sagt, als folgender in der *mechanique analytique* des Herrn de la Grange enthaltene statische Grundsatz:

Si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcourt un espace infiniment petit, qui exprimera sa vitesse virtuelle; la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace, que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zéro, en regardant comme

positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé.

§. 17.

Betrachten wir ein System von Punkten, wobei letztere zwar unter einander nicht in einem festen, gegen einander unverschiebbaren Zusammenhange stehen, wobei sie jedoch dergestalt mit einander verbunden sind, dass durch die Bewegung eines dieser Punkte nach einer angenommenen Richtung um einen bestimmten Raum, alle übrigen Punkte dieses Systems um bestimmte Räume nach bestimmten Richtungen sich zu gleicher Zeit bewegen müssen: so ist es leicht, sich zu überzeugen, dass das in den Paragraphen 4 bis 13 vom kombinierten dynamischen Bestreben eines Punktes einer festen Masse, Gesagte, auch von dem kombinierten dynamischen Bestreben eines Punktes bei einem solchen Systeme von Punkten behauptet werden könne, wo die Punkte erwähntermassen un-

ter einander in Verbindung stehen. Bezeichnen wir daher das in einem solchen Falle Statt habende kombinierte Bestreben eines Punktes nach irgend einer Richtung, welches das Resultat sowohl der individuellen dynamischen Bestrebungen aller übrigen Punkte, als der Art des Zusammenhanges aller dieser Punkte unter einander ist, durch $\mathfrak{D}$; ferner die individuellen dynamischen Bestrebungen der einzelnen Punkte durch $d, d', d'', \dots$, endlich jene Räume, welche diese Punkte nach den Richtungen ihrer individuellen dynamischen Bestrebungen dann durchlaufen müssen, wenn man ein für allemal annimmt, es beschreibe der betrachtete Punkt nach der Richtung jenes kombinierten dynamischen Bestrebens den Raum $\mathfrak{S}$, durch $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}', \mathfrak{s}'', \dots$; so findet abermals folgende Gleichung statt; $\mathfrak{D} = \mathfrak{H} (d \mathfrak{s} + d' \mathfrak{s}' + d'' \mathfrak{s}'' + \dots)$, worinn $\mathfrak{H}$ eine konstante Grösse ist.

§. 13.

Stehen wie viel immer nicht materielle

Angriffspunkte einzelner Kräfte und zugleich beliebig viele von solchen Kräften unmittelbar theils nicht ergriffene Massen in jenem Zusammenhange, dessen (§. 17.) erwähnt wurde, so muss irgend eine gesetzmässige, mit dem Fortschreiten der Zeit in Relation stehende, beschleunigte Bewegung in dem ganzen Systeme statt haben, welche wir hier auf die allgemeinste Art bestimmen wollen. Hiezu mögen folgende Bezeichnungen dienen.

Kombinirtes dynamisches Bestreben des Punktes $\mathfrak{C}$ als Druck (statisch betrachtet) folglich als ein Resultat aller einzelnen Drucke $p, p', p'', \dots$, am Ende der Zeit $t = \mathfrak{D} = \mathfrak{A}$ ($p d\mathfrak{s} + p' d\mathfrak{s}' + p'' d\mathfrak{s}'' + \dots$). Kombinirtes dynamisches Bestreben des Punktes $\mathfrak{C}$ am Ende der Zeit t , als *quantitas motus*, folglich als ein Resultat aller Quantitäten der Bewegung $q, q', q'', \dots$ der einzelnen Massen $Q = N (q ds + q' ds' + q'' ds'' + \dots)$.

Nun ist dQ jenes Inkrementum, worum Q dadurch wächst, dass t um dt zunimmt.

Es wird erhalten, wenn Q in Bezug aller mit t sich ändernden Grössen differenziert wird. Nennen wir aber das Inkrementum, worum binnen dt das Q , blos durch Einwirkung von $\mathfrak{D}$, gewachsen ist, Variation Q , und bezeichnen es durch δQ , bezeichnen eben so die Zuwüchse von $q, q', q'', \dots$, welche binnen dt blos der Einwirkung von $\mathfrak{D}$ zuzuschreiben sind, durch $\delta q, \delta q', \delta q'', \dots$ so ist (da $ds, ds', ds'', \dots$ binnen dt blos durch eine veränderte Lage der Punkte gegeneinander verändert werden, worauf $\mathfrak{D}$ keinen Einfluss hat *)

$$\begin{aligned} \delta Q &= N (q + \delta q) ds + (q' + \delta q') ds' + \\ &\quad + (q'' + \delta q'') ds'' + \dots) - \\ &\quad - N (q ds + q' ds' + \dots) = \\ &= N (\delta q ds + \delta q' ds' + \delta q'' ds'' + \dots). \end{aligned}$$

(*) Anmerkung. Der Grund dieser streng mathematisch richtigen Behauptung, findet sich in meiner analytischen Bestimmung des Gesetzes u. s. w. weitläufiger auseinander gesetzt. Der Einfluss von $\mathfrak{D}$ bezieht sich auf die auszulassenden unendlich kleinen Glieder zweyter Ordnung.

Nun ist $\mathfrak{D}$ dem Quotienten $\frac{\delta q}{dt}$ proportional, also

$$\begin{aligned} & (p d\mathfrak{s} + p' d\mathfrak{s}' + p'' d\mathfrak{s}'' + \dots) = \\ & = \frac{\mu (\delta q ds + \delta q' ds' + \delta q'' ds'' + \dots)}{dt}, \end{aligned}$$

worinn $p, p', p'', \dots$ die Drucke $d\mathfrak{s}, d\mathfrak{s}', d\mathfrak{s}'', \dots$, die binnen dt von derselben nach ihren Richtungen partialen Befolgungen $ds, ds', ds'', \dots$, die von den Angriffspunkten der Bewegungsquantitäten nach den Richtungen der individuellen Bewegungen derselben, binnen dt beschriebenen Räume ausdrücken. Was die Inkremente $\delta q, \delta q', \delta q'', \dots$ der individuellen Bewegungsquantitäten anbelangt, so muss hier deutlich gezeigt werden, was für Bedeutungen diese Ausdrücke eigentlich haben (*).

(*) Anmerkung. Es werden zwar aus der hier gefundenen Hauptgleichung, welche algebraisch den dynamischen Lehrsatz der virtuellen Geschwindigkeit für jeden erdenklichen Fall ausdrückt, mehrere Gleichungen so-

Ist die Geschwindigkeit der Masse m (im betrachteten Systeme von Massen und Kräften) nach deren Bewegungsrichtung am Ende der Zeit $t = v$; wächst m binnen dt um dm , und hat dm bei seinem Hinzutritt zu m am Ende t schon die Geschwindigkeit (nach erwählter Richtung) $= w$, so ist, wenn dieselbe (nunmehr aber vermehrte) Masse binnen dt an Geschwindigkeit um dv zugenommen hat,

gleich abgeleitet werden. Ich muss aber den Leser erinnern, bei Anwendung auf Beispiele, nie unmittelbar diese abgeleiteten Gleichungen zu gebrauchen, sondern allemal auf die Grundgleichung zurückzugehen, da der eigentliche Sinn der hier folgenden Gleichungen nur dann richtig gefasst und angewandt werden kann, wenn man jedesmal untersucht, welche Variationen der individuellen Quantitäten an Bewegung in dem anzuwendenden Beispiele stattfinden. So ist es z. B. schon sehr schwer, eine der algebraischen Gleichungen da richtig anzuwenden, wo fortschreitende und rotatorische Bewegungen zugleich stattfinden, welche Schwierigkeit aber sogleich wegfällt, wenn man obige Grundgleichung anwendet, und die abgeleitete Gleichung nur als eine Erläuterung betrachtet. Bei weiterer Ergründung dieses Aufsatzes wird man dies deutlicher einsehen.

$\delta q = m d v + (v - w) d m$. In demselben Sinne ist

$$\delta q' = m' d v' + (v' - w') d m',$$

$$\delta q'' = m'' d v'' + (v'' - w'') d m'', \text{ u. s. w.}$$

Also ist

$$1, \quad p d \dot{f} + p' d \dot{f}' + p'' d \dot{f}'' + \dots = \\ = \frac{\mu (m d v + (v - w) d m) d s + (m' d v' + (v' - w') d m') d s' + \dots}{d t}$$

Diese allgemeine Formel erleidet nach Verschiedenheit der Fälle vor-
züglich folgende Modifikationen.

Sind die Massen $m, m', m'', \dots$ alle beständige Grössen, so ist

$$2, p d\dot{f} + p' d\dot{f}' + p'' d\dot{f}'' + \dots = \\ = \mu \frac{(m d v d s + m' d v' d s' + m'' d v'' d s'' + \dots)}{d t}$$

Sind die Massen $m, m', m'', \dots$ veränderlich, und die Geschwindigkeiten, womit die Masseninkremente dem System beitreten, negativ, so ist

$$3, p d\dot{f} + p' d\dot{f}' + p'' d\dot{f}'' + \dots = \\ = \mu \frac{(m d v + (v + w) d m) d s + (m' d v' + (v' + w') d m') d s' + \dots)}{d t}$$

Sind die Geschwindigkeiten der Masseninkremente $= 0$, so ist

$$4, p \, d\zeta + p' \, d\zeta' + p'' \, d\zeta'' + \dots = \\ = \mu \frac{(m \, dv + v \, dm) \, ds + (m' \, dv' + v' \, dm') \, ds' + \dots}{d \, t}$$

Sind endlich diese Geschwindigkeiten positiv und gleich jenen der Massen, so ist

$$5, p \, d\zeta + p' \, d\zeta' + p'' \, d\zeta'' + \dots = \\ = \mu \frac{(m \, dv \, ds + m' \, dv' \, ds' + m'' \, dv'' \, ds'' + \dots)}{d \, t}.$$

Zwischen der Gleichung 2 und jener 5 besteht der Unterschied, dass in erster m am Ende jeder Zeit t denselben Werth hat, dass hingegen in letzter m am Ende jeder Zeit t einen derselben entsprechenden Werth hat. Dasselbe gilt von m' , m'' , $\dots$.

Der Werth des beständigen Koeffizienten μ lässt sich aus einem einzigen Falle bestimmen. Denken wir uns eine durch ihre Schwere frey herab beschleunigte Masse an Gewicht $= Q$, so ist

$$Q d\mathfrak{f} = \frac{\mu \cdot Q \cdot d v d s}{d t}, \text{ oder}$$

$$= d\mathfrak{f} = \frac{\mu \cdot d v \cdot d\mathfrak{f}}{d t}, \text{ also } d v = \frac{d t}{\mu}, \text{ daher}$$

$$v = \frac{1}{\mu} t; \text{ nun wird in der ersten Lehre der}$$

Elementarmechanik erwiesen, dass $v = 2 g t$, worinn g die Beschleunigung der Schwere

$$\text{ist, also ist } \frac{1}{\mu} = 2 g, \text{ daher } \mu = \frac{1}{2 g}.$$

Da der von jeder Masse $m, m', m'', \dots$ binnen $d t$ durchlaufene Raum (nach der Richtung ihrer jedesmaligen Bewegung) $d s, d s', d s'', \dots$, jenem gleich kömmt, welche sie blos dem Gesetze der Trägheit gemäss durchläuft, nemlich $v d t, v' d t, v'' d t, \dots$, mehr jener, welchen sie durch Einwirken der bewegenden Kraft beschreibt, dieser letztere aber allemal ein Unendlich kleines der zweiten Ordnung ist, es möge die bewegende Kraft welch immer einen Werth haben, so ist in allen Fällen

$$d s = v d t, d s' = v' d t, d s'' = v'' d t, \dots$$

welche Werthe in die Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5,

substituirt machen, dass dt ganz hinwegfällt. Man begreift also hieraus den Sinn der Gleichung:

$$6, \quad p d\zeta + p' d\zeta' + p'' d\zeta'' + \dots = \\ = \mu ((m d v + (v - w) d m) v + (m' d v' + \\ + (v' - w') d m') v' + \dots).$$

Eben so lassen sich die Räume $d\zeta, d\zeta', d\zeta''$ durch $v dt, v' dt, v'' dt, \dots$ ausdrücken, wenn $v, v', v'', \dots$ die Endesgeschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte nach den Richtungen der Kräfte (nicht nach den Richtungen der Bewegungen dieser Angriffspunkte) darstellen. Hieraus folgt die Gleichung

$$7, \quad (p v + p' v' + p'' v'' + \dots) dt = \\ = \mu ((m d v + (v - w) d m) v + (m' d v' + \\ + (v' - w') d m') v' + \dots).$$

§. 19.

Die Massen können rücksichtlich der Quantität beständig, rücksichtlich der Identi-

tät aber veränderlich seyn, d. h. sie können binnen dt wachsen, um

$$\frac{f(t)m}{\infty}, \quad \frac{f'(t)m'}{\infty}, \quad \frac{f''(t)m''}{\infty}, \quad \dots$$

zugleich aber um dieselben Theile abnehmen, so dass also die Massen zu Ende $t + dt$ sind:

$$m + f(t) \frac{m}{\infty} - f(t) \frac{m}{\infty} = m, \quad \text{u. s. w.}$$

Dieser Umstand ist in die Formel zu bringen, mit der Rücksicht, dass $\mathfrak{D} = \frac{L}{dt}$ multipliziert mit jenem Zuwachs (binnen dt) an kombinirtem dynamischen Bestreben in L (als Quantität der Bewegung), sey, der blos und ganz dem $\mathfrak{D}$ zu verdanken ist: Sind nun die Masseninkremente $f(t) \frac{m}{\infty}, f'(t) \frac{m'}{\infty}, \dots$ mit den Geschwindigkeiten $w, w', w'', \dots$ hinzugetreten (*), so sind die binnen dt

(*) Anmerkung. Zugleicher Zeit haben die aus dem Systeme tretenden Massen $\frac{f(t)m}{\infty}, \dots$ die für das System gleichgiltigen Geschwindigkeiten $v, v', v'', \dots$

blos und ganz durch $\mathfrak{D}$ bewirkte Quantitäten

der Bewegung $= m dv + f(t) \cdot \frac{m}{\infty} (v - w) +$

$+ m' dv' + f'(t) \frac{m'}{\infty} (v' - w') + \dots\dots\dots$

Ich habe hier geflissentlich die Zuwüchse

$f(t) \frac{m}{\infty}, f'(t) \frac{m'}{\infty}, \dots\dots\dots$ nicht durch $dm,$

$dm' \dots\dots\dots$ bezeichnet, da der Sinn eines

Differenzials nicht hieher passt; indess lässt

sich aus den Bedingnissen der Aufgabe der

Zuwachs $f(t) \frac{m}{\infty}$ eben so bestimmen, als

wäre dieser ein Differenzial.

In dem hier auseinander gesetzten Falle,

haben wir demnach die Gleichung

$\delta, p d\mathfrak{s} + p' d\mathfrak{s}' + p'' d\mathfrak{s}'' + \dots\dots\dots =$

$= \frac{1}{2g dt} \left((mdv + f(t) \frac{m}{\infty} (v - w)) ds + \right.$

$+ (m' dv' + f'(t) \frac{m'}{\infty} (v' - w')) ds' +$

$+ (m'' dv'' + f''(t) \frac{m''}{\infty} (v'' - w'')) ds + \dots\dots\dots \Big),$

worinn abermals $ds = v dt, ds' = v' dt,$

$ds'' = v'' dt, \dots\dots\dots$ substituirt werden können.

Hier lassen sich wieder die Modalitäten bestimmen, wenn $w, w', w'', \dots$ —, oder $= 0$, oder $= +v, v', v'', \dots$, werden.

Es lässt sich endlich auch der Fall denken, wo die verschiedenen Massen nach den hier verschiedenen Rücksichten zugleich sich ändern möchten, und hieraus wäre der Sinn der Gleichung begreiflich:

$$\begin{aligned} & p \, d\zeta + p' \, d\zeta' + p'' \, d\zeta'' + \dots \\ &= \frac{1}{2g \, dt} \left((m \, dv + (v - w) \, dm) \, ds + \right. \\ &+ m' \, ds' \, ds' + (m'' \, dv'' + (v'' + w'') \, dm'') \, ds'' + \\ &+ (m''' \, dv''' + f'''(t) \frac{m'''}{\infty} (v''' - w''')) \, ds''' + \dots \left. \right) \end{aligned}$$

Ueberhaupt ist es in einem solchen verwickelten Falle am besten, allemal die allererste, ursprüngliche Gleichung

$$\begin{aligned} & p \, d\zeta + p' \, d\zeta' + p'' \, d\zeta'' + \dots = \\ &= \frac{1}{2g \, dt} (\delta q \cdot ds + \delta q' \cdot ds' + \delta q'' \cdot ds'' + \\ &+ \delta q''' \cdot ds''' + \dots) \end{aligned}$$

anzusetzen, und aus den Bedingnissen der

Aufgabe, mit Rücksicht auf die eben vorge-
tragenen Grundsätze die Werthe der Aus-
drücke dq , dq' , dq'' , dq''' zu substi-
tuiren.

§. 20.

Ich will das eben Gesagte, rücksichtlich
der Art der Veränderlichkeit der Massen
beyspielweise erläutern:

Aufgabe. Man gedenke sich eine voll-
kommen beugsame Schnur auf den Bo-
den dergestalt zusammengelegt, dass beim
senkrechten Hinaufziehen des einen Endes der
Schnur, der aufgezugene Theil beständig als
auf dem Horizonte senkrecht angenommen
werden darf. An dem besagten Ende der
Schnur wirkt eine beständige bewegende Kraft
 p , nach einer auf den Horizont senkrechten
Richtung. Welches Gesetz der Bewegung
wird hier der Angriffspunkt der Kraft p be-
folgen?

Bei einigem Nachdenken sieht man so-
gleich ein, dass diese Aufgabe nach Gleichung

4 zu lösen sey. Wir nennen s die am Ende der Zeit t aufgezugene Länge, γ das Gewicht der Längeneinheit unserer Schnur; und nehmen an, es sey zu Anfange der Zeit t schon die Länge l aufgezogen, so dass für $t = 0$, $s = l$ sey. Es ist demnach

$$p - \gamma s = \frac{1}{2g} \frac{d}{dt} (\gamma s dv + v \gamma ds), \text{ oder}$$

$$p ds - \gamma s ds = \frac{\gamma}{2g} (s dv + v^2 ds).$$

Hieraus folgt

$$s ds + \left(-\frac{p}{\gamma} + 0 \cdot v + \frac{1}{2g} \cdot v^2 \right) ds = s dv \left(0 - \frac{1}{2g} \cdot v \right)$$

Nach Eulers Methode wird diese Gleichung so integrirt.

Setze $u = \frac{s \cdot v}{2gs - \frac{2gp}{\gamma}}$, so gibt obige Gleichung

folgende

$$4g^2 \int \frac{dv}{-\frac{2gp}{\gamma} \cdot v + v^3} = \int \frac{du}{-\frac{p}{2g\gamma} \cdot u + u^3};$$

wendet man hier die Lehre der Partialbrüche

an, so erhält man nach gehöriger Substitution, eine Gleichung von der Form

$$v = \pm \sqrt{A + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2}}.$$

Man sieht hieraus, dass das von der Kraft ergriffene Ende der Schnur in jedem Punkte seiner Bahn während dem Sinken, dieselbe Geschwindigkeit hat, als es binnen dem Steigen in demselben Punkte hatte (wie dieses bei einem in die Höhe geworfenen schweren Körper der Fall ist); ferner wird die Geschwindigkeit in zwei verschiedenen Punkten des Raumes zu Null, nemlich in jenen, wo die Bewegung anfängt, und wo die Bewegung hierauf aufhört. Vielleicht scheint es Manchem ein Unsinn, und flösst Selbigem gegen die hier geführte Rechnung Misstrauen ein, dass man für $s = 0$, $v = \infty$ erhält. Allein ich will hier zeigen, dass man in dieselbe Lage geräth, wenn man eine so wachsende beschleunigte Masse annimmt, dass die zuwachsenden Massenelemente mit der Geschwin-

digkeit der Masse zu treten, und wenn man deren Geschwindigkeit im Augenblicke ihres Entstehens sucht. Nehmen wir eine Masse an, die mit der Zeit so wächst, dass sie am Ende jeder Zeit $t = mt$ sey; setzen wir ferner, es trete binnen jedem dt , das Differential der Masse mit der Geschwindigkeit v der ganzen, durch die beständige Kraft P beschleunigten Masse hinzu, so ist nach den allgemein angewandten Formeln der Mecha-

$$\text{nik: } dv = \frac{2g \cdot P}{mt} dt, \text{ also } v = \frac{2gP}{m} l. n. t. +$$

$$+ \frac{2gP}{m} l. n. C = \frac{2gP}{m} \log. \text{ nat. } Ct;$$

hier erhält man die Geschwindigkeit für den Anfang der Bewegung $= -\infty$. Hätte man die Masse mt^3 angenommen, so hätte man

$$v = -\frac{gP}{mt^2} + C, \text{ also für } t = 0, v = -\infty.$$

Denkt man sich unter denselben Bedingungen des Hinzutretens der Massendifferentiale, eine dergestalt zunehmende beschleun-

nigte Masse, dass der Werth am Ende jedes Raumes $s = ms$ sey, so ist

$$dv = \frac{2gP}{ms} dt = \frac{2gP}{ms} \frac{ds}{v}, \text{ also}$$

$$v^2 = \frac{4gP}{m} \log. \text{ nat. } Cs, \text{ also für } s = 0,$$

$v = -\infty$. Setzt man die Masse $= m(\alpha + s)$, so, dass sie am Anfange des Raumes

$$= m\alpha \text{ ist, so hat man } v^2 = \frac{4gP}{m} \text{ l. n. } (\alpha + s),$$

$$\text{also im Anfange des Raumes} = \frac{4gP}{m} \text{ l. n. } \alpha;$$

aber in jenem Punkte des Raums, wo die Masse $= 0$ ist, nemlich für $s = -\alpha$, hat man abermals $v^2 = -\infty$.

Eine Anwendung unserer Formel 8 ist folgende. Es werde die schiefe Ebene $\mu \lambda \rho$ (s. Fig. 1.) durch die Kraft p (nach μp wirkend) horizontal über einen sandigen Boden bewegt, doch so, dass dieselbe mit ihrer Spitze in den Sand eindringe, und hiedurch beständig eine Sandschichte über die schiefe Ebene zu

steigen gezwungen wird. Jene Theile des Sandes, welche bis an die höchste Spitze der Ebene gelangt sind, fallen hinter derselben herab, indess eben so viele neue Sandtheile unten an der Spitze μ zu steigen beginnen; und so kann man annehmen, die steigende Sandmasse bleibe (ihrem Gewichte nach) immer dieselbe, obgleich die Theile derselben sich beständig ändern, so dass die Identität der Sandmasse veränderlich ist. Wir nehmen an: Querschnitt von $\alpha \gamma \lambda \mu = f$; Gewicht kubische Einheit der Sandmasse γ , also $m = \gamma \cdot l \cdot f$; Widerstand gegen das Eindringen der Spitze $= k$. Beständige Zugkraft p . Am Ende Zeit t Endesgeschwindigkeit des Keils $= v$, durchlaufener Raum $= s$; binnen dt zuwachsende und abfallende Masse $f(t) \cdot \frac{m}{\infty} = \gamma \cdot f \cdot \frac{ds}{\cos \varphi}$, durchlaufener Raum binnen dt von Masse $= \frac{ds}{\cos \varphi}$; Relatives Gewicht der steigenden Masse nach $\gamma \alpha = \gamma \cdot f \cdot l \cdot \sin \varphi$: Gewicht des Keils $= M$, also ist (Formel 8).

$$p ds - k ds - \gamma f l \sin \varphi \frac{ds}{\cos \varphi} =$$

$$= \frac{1}{g dt} \left(\frac{ds}{\cos \varphi} \left(\frac{\gamma l f \cdot dv}{\cos \varphi} + \frac{\gamma \cdot f \cdot v \cdot ds}{\cos^2 \varphi} \right) + M dv ds \right),$$

oder

$$(p - k - \gamma f l \tan \varphi) dt =$$

$$= \left(\frac{M}{g} + \frac{\gamma \cdot l \cdot f}{2g \cos^2 \varphi} \right) dv + \frac{\gamma f}{2g \cos^3 \varphi} v^2 dt,$$

oder

$$A dt = B dv + D \cdot v^2 dt \text{ oder}$$

$$dt = \frac{B dv}{A - D \cdot v^2} \text{ also } t = B \int \frac{dv}{A - D v^2} =$$

$$= C - \frac{B}{2\sqrt{AD}} \log. \text{ nat. } \left(\frac{\sqrt{\frac{D}{A}} \cdot v - 1}{\sqrt{\frac{D}{A}} \cdot v + 1} \right).$$

Hätte man angenommen, es sey p gerade nur so gross, dass die Geschwindigkeit konstant, also $v = c$, und $dv = 0$ wäre, so hätte man die Differenzialgleichung so ansetzen müssen:

$$(p - k - \gamma f l \cdot \tan \varphi) dt =$$

$$\frac{\gamma f}{2g \cdot \cos^3 \varphi} c^2 dt; \text{ woraus folgt}$$

$$p = k + \gamma f l \cdot \tan \varphi + \frac{\gamma f \cdot c^2}{2g \cos^3 \varphi}.$$

p kann hier die Zugkraft an einem Pfluge mit gerader Scharre, wo der Boden nicht gewendet wird, und in lockerm, sandigem, nicht steinigten Boden ausdrücken, wobei jedoch der Reibungswiderstand ausser Acht gelassen ist.

Wir wollen nunmehr in den folgenden Paragraphen mehrere der wichtigen Sätze der Statik, Mechanik, und physischen Astronomie nach der, in dieser Schrift aufgestellten analytischen Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten, begründen. Da ich hier nicht die Absicht habe, ein Lehrbuch der Dynamik zu schreiben, sondern blos Materialien zu einem solchen zu liefern, so hebe ich nur die interessantesten Sätze der Dynamik und physischen Astronomie aus, und jene, welche nach meiner hier vorgetragenen Lehre einer vorzüglichen Auflösungsmethode fähig sind.

§. 21.

Der Hebel. Denkt man sich wie viel immer Kräfte (Drucke) von beliebigen Grössen,

nach beliebigen Richtungen wirkend, an was immer für unverschiebbar unter einander verbundenen Punkten angebracht, unter einander im Gleichgewichte, sowohl in Bezug auf das Fortschreiten des ganzen Systems, als rücksichtlich der Rotation um einen der Punkte des Systems, so giebt diess den allgemeinsten Begriff des Hebels ab. Das Verhältniss der Kräfte gegen einander folgt für diesen Fall aus §. 14 und §. 15, wobei allemal schon von selbst jene Drucke mit in Rechnung kommen, welche der sogenannte Ruhepunkt (*hypomochlium*) nach drei auf einander senkrechten Axen erleidet. Auch ist es leicht, durch sehr einfache Substitutionen, die statischen Momente in Rechnung zu bringen, und hierdurch den allgemeinen Lehrsatz des Hebels, algebraisch ausgedrückt, so zu erhalten, wie er in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Statik zu finden ist.

Ganz dasselbe lässt sich von den, an der zusammengesetztesten Hebelade, oder an irgend einem Räderwerke. angebrachten Kräften be-

haupten, wobei allemal schon auch die Drucke mit in Rechnung kommen, welche die verschiedenenlei Axen, oder Ruhepunkte erleiden.

Wären hier, statt der Drucke, durchaus Quantitäten der Bewegung angenommen, so liesse sich vom Gleichgewichte dieser individuellen dynamischen Bestrebungen am Hebel ganz dasselbe behaupten, als von jenen der Drucke unter einander. Sollen aber Quantitäten der Bewegung und Drucke gegen einander im Gleichgewichte seyn, so müssen die individuellen dynamischen Bestrebungen von einerlei Natur gegen einander im Gleichgewichte stehen. Diess ist indessen nicht so gemeint, als widerspräche es den Grundsätzen der Dynamik, anzunehmen, es könne in einzelnen Fällen ein Druck mit Quantität der Bewegung kombinirt, rücksichtlich der Geschwindigkeit nicht im Gleichgewichte stehen, d. h. nicht eine gleichförmige Geschwindigkeit zum Resultate haben. Werden Sinn meiner hier vorgetragenen Lehre

gefasst hat, versteht, was ich hiemit sagen will, ohne mich hier in langwierige Erklärung einzulassen. Folgendes Beispiel mag einen Fingerzeig dazu abgeben.

Der Sinn der Formel

$$p \, ds = \frac{1}{2g \, dt} \left(m \, dv + (v - w) \, dm \right) ds,$$

wenn man sich den Angriffspunkt der Kraft p im Schwerpunkte der wachsenden Masse m denkt, ist bekannt. Setzen wir nun die Geschwindigkeit w des hinzutretenden Differenzials der Masse $= 0$, und nehmen an, es bestehe ein Wachsen der Massen nach einem solchen Gesetze, dass hiedurch die Geschwindigkeit v am Ende jeder Zeit t dieselbe sey, und bezeichnen selbige durch c , so verwandelt sich obige Gleichung in jene

$$p = \frac{c \, dm}{2g \, dt}; \text{ hieraus folgt}$$

$$m = \frac{2g \, p \, t}{c} + M. \text{ Hier hat also die Kraft}$$

$$p; \text{ binnen der Zeit } t, \text{ eine Quantität der Bewegung } \left(M + \frac{2g \, p \, t}{c} \right) c - M c = 2g \, p \, t \text{ her-}$$

vorgebracht. Hätte dieselbe Kraft eine beständige Masse M beschleunigt, so wäre die

Gleichung richtig $p ds = \frac{1}{2g dt} M. dv ds,$

woraus folgt: $v = \frac{2gp t}{M} + C;$ in diesem

Falle hätte die Kraft p , binnen der Zeit t , die Quantität der Bewegung =

$= M \left(\frac{2gp}{M} t + C \right) - MC = 2gp t,$ also

ganz dieselbe, als im vorletzten Falle, bewirkt.

§. 22.

Das Parallelogram der Kräfte:

Denken wir uns die Kräfte $p, p', p'', p''', \dots$

$\dots$, an einem Punkte O dergestalt ange-

bracht, dass die Richtungen derselben an die-

sem Punkte die Winkel $\beta', \beta'', \beta''', \dots$

unter einander bilden, und in einerlei Ebene

liegen, so gibt es allemal zwei (nach dersel-

ben Ebene wirkende) Kräfte x und y , wel-

che, nach auf einander senkrechten Rich-

tungen wirkend, den Punkt O in vollkom-

menem Ruhestande erhalten; denn dieser erfolgt, wenn der Punkt weder nach der einen, noch nach der andern der eben erwähnten Richtungen eine Bewegung hat. Die Bedingungen dieser Aufgabe lassen sich allemal durch zwei Gleichungen von folgender Form ausdrücken: $p \cdot \mathcal{S} \cdot \cos \alpha + p' \mathcal{S} \cos (\beta' - \alpha) + p'' \cdot \mathcal{S} \cdot \cos (\beta'' - \alpha) + \dots - \mathcal{S} \cdot x = 0$, und $p \sin \alpha - p' \sin (\beta' - \alpha) - p'' \sin (\beta'' - \alpha) - \dots - y = 0$, worinn α den Winkel bedeutet, den die Richtung der Kraft x mit jener der Kraft p bildet. Soll der vollkommene Stillstand des Punktes O durch eine einzige Kraft x erhalten werden, so muss α so gross gemacht werden, dass hiedurch y verschwinde.

Nimmt man nur zwei Kräfte p, p' , an, so erhält man für das Verschwinden von y

$$\text{den Werth von } \alpha = \text{Arc. tang} \left(\frac{p' \sin \beta'}{p + p' \cos \beta'} \right).$$

Wird dieser Werth in die Gleichung, worinn x enthalten ist, substituirt, so erhält man die Grösse der Kraft x , welche allein den Kräften p, p' , das Gleichgewicht hält. Man über-

zeugt sich aber sehr leicht, dass die hier, ihrer Richtung und Grösse nach, bestimmte Kraft x , geometrisch dargestellt, die negative Diagonale jenes Parallelogramms ist, welches aus den, durch Linien ausgedrückten, Kräften p , p' , konstruirt wird, und hie-mit ist also der wichtige Lehrsatz des Parallelograms der Kräfte, als eine unmittelbare Folge des statischen Prinzips der virtuellen Geschwindigkeit erwiesen.

Wirken die Kräfte nicht in einerlei Ebene, so liessen sich selbige auf die gleichgeltende Wirkung einer einzigen Kraft dadurch bringen, dass man jegliche zwei auf die Resultatkraft brächte, und so fort, endlich bis auf ein einziges Resultat fortschreiten möchte.

Denken wir uns den Punkt O als eine Masse $= m$, welcher nicht von Druckkräften p , p' , p'' , ... ergriffen würde, sondern in einerlei Zeitmomenten nach oben erwähnten Richtungen die Geschwindigkeiten c , c' , c'' , ... hätte, so wären die individuellen dynamischen Bestrebungen von m , nach die-

sen Richtungen, $= mc, mc', mc'', \dots$. Das kombinierte dynamische Bestreben dieser individuellen dynamischen Bestrebungen, kann in diesem Falle immer nur eine Quantität der Bewegung seyn; soll daher der Punkt O sich im Gleichgewichte befinden, so muss er nach den oben erwähnten, auf einander senkrechten Richtungen, die Quantitäten der Bewegung mX und mY (also zugleich die Geschwindigkeiten X, Y) haben, von welchen behauptet werden kann: $mc \cos' \alpha + mc' \cos (\beta' - \alpha) + mc'' \cos (\beta'' - \alpha) - mX = 0$, und $mc \sin \alpha - mc' \sin (\beta' - \alpha) - mc'' \sin (\beta'' - \alpha) - mY = 0$, worinn sich m durchaus aufhebt. Bei jenem Werthe von α , wodurch Y verschwindet, hat X jene Richtung, wodurch diese dem Punkte O ertheilte Geschwindigkeit allein im Stande ist, ihn (bei den zugleich bestehenden Geschwindigkeiten $c, c', c'', \dots$) in Ruhe zu erhalten. Hieraus lässt sich nun eben so leicht wie vorhin der Lehrsatz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten erweisen, u. s. w.

Hier wäre es in der Ordnung, die wichtigsten Sätze der statischen Baukunst, vorzüglich in Bezug auf Dachstühle, Gewölbe, Brückenbögen u. s. w. vorzutragen. Da indess diese Gegenstände, blos auf dem Parallelogramme der Kräfte beruhen, und in manchen Schriften (vorzüglich in des Herrn geheimen Oberbaurathes von Eytelwein Statik) schon sehr ausführlich abgehandelt sind, so übergehe ich sie, als dem Zwecke dieser Schrift nicht angemessen.

§. 23.

Der Schwerpunkt. Die allgemein bekannte Theorie des Schwerpunkts folgt so leicht aus der hier vorgetragenen Lehre, dass ich den Vortrag derselben hier füglich übergehen kann (*).

(*) Anmerkung. Siehe meine analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten u. s. w. §. 18.

§. 24.

Die absolute Stärke fester Körper oder deren Widerstand gegen das Zerreißen und Zerdrücken, nach der Richtung der Kraft. Dieser in den Lehrbüchern der Statik sehr leicht und kurz abgehandelte Gegenstand, wie dieses, blos rücksichtlich seiner Anwendung, auch sehr zweckmässig geschieht, war für mich von jeher, wenn ich ihn philosophisch ergründen wollte, einer der allerschwierigsten und unbegreiflichsten, zumalen seit der Zeit, als ich anfang, alle Naturerscheinungen einem Gesetze der Stätigkeit unterwerfen zu wollen. Es sey mir erlaubt, einige meiner Ideen hierüber zu äussern, wenn gleich die in diesem Werke vorgetragene Lehre, darauf keinen Einfluss hat.

Wenn die Faser eines ausdehnsamen, aber endlich doch zerreisenden Körpers an dem einen Ende an einem fixen Punkte befestigt, an dem andern durch eine beständig wachsende Kraft gespannt wird, so wird die

Faser allmählig länger, und reisst endlich. Drücken wir die jedesmalige Verlängerung durch die Länge einer Abscisse, und die entsprechende Kraft, durch die Länge einer Ordinate aus, so erhalten wir, so lange das Reißen nicht erfolgt, eine Curve, welche allerdings einem stäten Gesetze unterliegt. Reisst dann die Faser bei der Länge $= l$, so ist die Ordinate der Abscisse $l + \delta$ [sey δ wie immer klein] eine unmögliche Grösse. Hier hört unsere, sich von der Abscissenaxe allmählig entfernende Curve mit einem Male auf. Hieraus folgt denn nun freilich nicht, dass über den Werth l hinaus, die Curve eine *functio discontinua* seyn müsse, denn es dürfte die Ordinate y unserer Curven durch die Abscisse x nur folgendermassen ausgedrückt seyn, um diese Bedingnisse zu erfüllen: $y = \sqrt{l} + \mathcal{N}x - \sqrt{l - x}$. Erwäget man aber weiter den Umstand, dass viele Körper nach dem Zerreißen durch keine *Compression* (auch im luftleeren Raume, wo also nichts sich dem Nähern der Brechungs-

ebenen entgegen setzt) der Brechungsebenen an einander, sich wieder zusammenfügen lassen, so ist es vielleicht eben so vernünftig, anzunehmen, es werde die Natur des Körpers bei einem gewissen Grade der Ausdehnung dergestalt verändert, dass er über selben hinaus dem bis dahin befolgten Gesetze der *Continuität* nicht mehr unterliege.

Ich halte mich zu diesem Schlusse um so mehr berechtigt, als seit der glücklichen Epoche, wo mehrere mit ächtem Wahrheitssinn ausgerüstete Männer anfangen, die gesamte Physik und Chemie dem Zepter der Mathematik zu unterwerfen, und auf Gesetze der quantitativen Verhältnisse bei ihren Untersuchungen ein ganz vorzügliches Augenmerk zu werfen, uns häufige Beispiele dieser Art geliefert werden. Wie sehr interessant sind z. B. in dieser Hinsicht, die nunmehr bestätigten stufenweisen Mischungsverhältnisse in den chemischen Verbindungen, worüber Berzelius so bestimmte Gesetze angibt.

Auch Daltons, durch so genaue Versuche bestätigte, Lehre über die Expansivkraft der Wasserdämpfe, kann die hier aufgestellte Behauptung verdeutlichen. Wird Wasserdampf beständig bei 30° Reaumur erhalten, so unterliegt seine Expansivkraft bei Veränderung des Volumens ganz dem Mariott'schen Gesetze, in so ferne das Volumen grösser ist als jenes, bei welchem der Barometerstand 30 englische Zolle beträgt; wird hingegen das Volumen unter jenes vermindert, bei welchem die Expansivkraft 30 englischen Zollen entspricht, so kondensirt sich ein Theil des Dampfes, und nunmehr ist der Barometerstand eine beständige Grösse, hingegen wird die Menge des in Dampf aufgelösten Wassers veränderlich, denn sie ist bloß mehr vom Volumen abhängig. Die Dämpfe ändern hier ihre Natur, über und unter besagter Grenze. Wer bei Untersuchung der Expansivkraft des Wasserdampfes, über und unter diesen Grenzen, diese beiderlei Gesetze gefunden hätte, dabei aber (wenn

z. B. der Niederschlag so geringe wäre, dass er durch die Sinne nicht wahrgenommen werden könnte) auf die Vermuthung eines veränderten Zustandes in dem geprüften Körper nicht gerathen wäre, müsste höchst betroffen seyn, das Gesetz der *Continuitaet* hier so sehr zu vermissen. Und wie manche Untersuchung kann doch von dieser Art seyn?

§. 25.

Die relative Festigkeit und das Tragungsvermögen solcher fester Körper, welche in mehreren Punkten unterstützt, in andern beschwert sind. Dieser in mehreren Lehrbüchern, ganz vorzüglich aber in des Herrn geheimen Oberbauraths von Eytelwein vortreflichen Lehrbuche der Statik gründlich und fasslich abgehandelte Gegenstand, gewinnt durch die Lehre der virtuellen Geschwindigkeiten nichts, denn er beruht auf den allereinfachsten Anwendungen des Hebels, und gerade jene Rücksichten, welche diese Betrachtungen schwie-

rig machen, werden durch die Lehre der virtuellen Geschwindigkeiten keineswegs beseitigt (*).

§. 26.

Die Bewegung auf vorgeschriebenen Wegen. Ich behalte diesen in den Lehrbüchern der Mechanik üblichen Ausdruck bei, um meine Leser hiedurch sogleich in die Wissenschaft des Gegenstandes zu setzen, von welchem hier die Rede seyn soll. Indess erlaube ich mir zu bemerken, dass dieser Ausdruck nicht aus der Natur des Gegenstandes geschöpft ist. Ist denn die Bahn des um eine Centrakraft sich bewegenden Körpers

(*) Anmerkung. Ich erlaube mir bei dieser Gelegenheit, auf eine kleine Abhandlung aufmerksam zu machen, die ich im Jahre 1812 unter dem Titel: „zwei Aufsätze mathematischen Inhalts“ bekannt gemacht habe, worinn ich die Vertheilung des Druckes, bei einem auf 3 Unterlagen ruhenden Balken analytisch untersuchte. Ich komme darinn auf Resultate, welche ich das Vergnügen hatte, mit der Erfahrung übereinstimmend zu finden.

nicht eben so vorgeschrieben und genau bestimmt, als jene einer Pendellinse, eines über eine schiefe Fläche beschleunigten Körpers? Kann denn je ein, im unendlichen Raume frei schwebender, Körper sich in dem Falle befinden, willkürlich diese oder jene Bahn zu befolgen? Schreibt ihm nicht jedesmal die *Combination* der auf ihn dynamisch einwirkenden Ursachen das Gesetz der Bahn und Beschleunigung so genau vor, dass selbst der eingeschränkte Verstand des Menschen sie aus reinen Axiomen und durch Schlüsse zu enthüllen im Stande ist? Richtiger würde man statt obiger Aufschrift folgende ansetzen: Die Bewegung in Bahnen, welche von den am Systeme angebrachten Kräften unabhängig sind, und blos durch die Art des Zusammenhanges der das System bildenden Theile bestimmt werden.

Die wichtigsten hieher gehörigen Sätze sind jene von der Bewegung des Pendels, des schweren Körpers, über eine wie immer gekrümmte undurchdringliche Ebene, der

Massen um einerlei Axe, oder um mehrere Axen, um welche die gleichzeitigen Bewegungen in bestimmter Relation unter einander stehen, wobei die Massen zu gleicher Zeit auch noch ihre eigenen Rotationsbewegungen haben können, welche letztere bestimmte Funktionen ihrer fortschreitenden Bewegungen sind. Diese, besonders wenn die letzte Rücksicht eintritt, beim ersten Anblick oft sehr schwierigen Aufgaben, sind im Grunde doch nur unmittelbare Anwendungen des in dieser Schrift begründeten dynamischen Lehrsatzes der virtuellen Geschwindigkeiten. Ich will wenigstens den Weg hier angeben, auf welchem alle diese Fälle unter einen einzigen allgemeinen Gesichtspunkt gebracht werden können, theils, um von der Geschmeidigkeit meines dynamischen Lehrsatzes eine Probe zu geben, theils, weil eine richtige Darstellung der Relation unleugbarer Wahrheiten untereinander, und die Bestimmung des Centralpunktes derselben (wofür eine allgemeine Formel doch sicherlich anzusehen

ist) dem philosophischen Geiste stets willkommen seyn müssen.

Um indessen den Gegenstand hier nicht unnützerweise zu erschweren, betrachte ich nur eine Masse, und nehme an, es sey die Kraft stets in ihrem Schwerpunkte angebracht. Hiedurch wird freilich der Fall ausgeschlossen, wo mehrere Massen um einerlei, oder mehrere Axen durch Kräfte beschleunigt werden, welche nicht an den Massen unmittelbar angebracht sind; allein dieser zusammengesetzte Fall ist leicht aufzulösen, wenn man den Geist der hier vorgetragenen Methode gefasst hat (*).

(*) Anmerkung. Ich habe in meiner analytischen Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten, in mechanischer und statischer Hinsicht, das Gesetz der Rotation bei zusammenhängenden Massen und Kraftangriffspunkten um eine fixe Axe, sammt dem Drucke auf die Axe, auf eine ganz eigene Art bestimmt, und bin auf eine allgemeinere Formel, die ich bisher noch nirgends gelesen habe, gekommen. Hieraus lässt sich die Theorie des Schwungrades u. s. w. erörtern.

§. 27.

Es bestehe eine durchaus gleich dichte cylindrische nicht schwere Masse (nicht schwere Masse heisst, dass ihre Schwere zur Beschleunigung nichts beiträgt, wie z. B. bei einem horizontal fortbewegten Körper), das Gewicht der kubischen Einheit derselben sey $= \gamma$, die Länge des Cylinders sey $= l$, der Halbmesser des kreisförmigen Querschnitts dieses Cylinders sey $= r$. Sie sey in der Lage (werde ihr Schwerpunkt von einer wie immer wirkenden Kraft ergriffen,) sich nicht anders bewegen zu können, als mit ihren Schwerpunkten beständig in einerlei Ebene, worauf ihre Axe stets senkrecht steht, und zwar nach einer gegebenen Curven, deren Abscisse wir durch x und deren auf der Abscissenaxe senkrechte Ordinate wir durch y bezeichnen wollen; zugleich aber sey sie gezwungen, sich um ihre Axe dergestalt zu drehen, dass die Winkelgeschwindigkeit ω um diese Axe eine Funktion $= f(v)$ der jedesmaligen der Zeit t und den vom Schwer-

punkte durchlaufenen Raume s entsprechenden Endesgeschwindigkeit v sey. Der Schwerpunkt der Masse werde durch eine in besagter Ebene wirkende Kraft P ergriffen, welche mit der Ordinatenaxe den Winkel μ bildet. Welches wird hier das Gesetz der Bewegung seyn?

Erwäget man, dass das binnen dt blos dem Einwirken von P zu dankende Inkrementum an Quantität der Bewegung, sich sowohl auf die fortschreitende Bewegung, als auf die rotatorische aller unendlich dünnen konzentrischen hohlen Cylinder des ganzen Cylinders bezieht, ferner, dass, rücksichtlich des Fortschreitens, alle Elemente binnen dt den Raum ds beschreiben, dass hingegen, rücksichtlich der erwähnten Rotationsbewegungen, jeder hohle Cylinder vom Halbmesser ρ , indem er die Geschwindigkeit $\rho\omega$ hat, binnen dt den Raum $\rho\omega dt$ beschreibt, so ist es leicht, auf die hier statt findende Gleichung zu gelangen:

$$\begin{aligned}
 P \sin \left(\mu + \text{Arc. tang. } \frac{dy}{dx} \right) ds &= \\
 &= \frac{r^2 \pi l \gamma}{2g} \left(v dv + \frac{r^2}{2} \cdot \omega d\omega \right) = \\
 &= \frac{r^2 \pi l \gamma}{2g} \left(v dv + \frac{V dV}{2} \right), \text{ wenn } V
 \end{aligned}$$

die der Zeit t entsprechende Endesgeschwindigkeit der gekrümmten Oberfläche des Cylinders um die Axe ausdrückt (*).

Aus dieser Gleichung lassen sich manche schöne Resultate folgern.

§. 28.

Wenn der Cylinder mit dem Ende einer Stange von der Länge $= R$ fest verbunden ist, und mit selbiger um das andere Ende der Stange in einem Kreise vom Halbmesser R dadurch gedreht wird (die Masse der Stange bei Seite gesetzt), dass die Kraft P nach der

(*) Anmerkung. Bei Anwendung dieser allgemeinen Formel vergesse man ja nicht, dass die krummlinigte Bahn, worauf sich x, y, s , beziehen, allemal die Bahn des Mittelpunkts des Cylinders ist.

Tangente dieses Kreises beständig mit einerlei Druck wirkt, wobei der Cylinder nach jedem periodischen Umlaufe, sich ganz um seine Axe gedreht hat (auf ähnliche Art, wie der Mond sich um die Erde bewegt, wenn dessen Libration vernachlässigt wird) in diesem Falle ist $\omega = \frac{v}{R}$, und der von der Kraft

P binnen dt nach ihrer Richtung durchlaufene Raum $= ds$, also hat man

$$P s = \frac{r^2 \pi l \gamma}{4g} \left(1 + \frac{r^2}{2R^2} \right) v^2. \text{ Wäre}$$

$P = r^2 \pi l \gamma$ gewesen, so hätte man

$$v = 2 \sqrt{\frac{g}{1 + \frac{r^2}{2R^2}}} s \text{ erhalten. Hätte sich}$$

die Masse $r^2 \pi l \gamma$ im Kreise, vom Halbmesser R , durch Einwirken der Tangentialkraft $r^2 \pi l \gamma$ so bewegt, dass sie sich dabei gar nicht gedreht hätte, so, dass also nach einem periodischen Umlaufe alle Punkte der gekrümmten Cylinderoberfläche einem Beobachter im Centro dieses Kreises sichtbar geworden wären, so wäre $\omega = 0$, also hätte man

durch Substitution in die Gleichung (§. 27.) erhalten $v = 2 \sqrt{gs}$, also ganz dieselbe Geschwindigkeit am Ende des aus der Ruhe durchlaufenen Bogens s , als ob dieselbe Masse $r^2 \pi l \gamma$ durch ihre Schwere $r^2 \pi l \gamma$ über die Höhe s aus der Ruhe frei herabgefallen wäre. Dass diess Resultat sehr vernünftig sey, sieht wohl Jedermann ein.

§. 29.

Wenn der Cylinder (allen Reibungswiderstand bei Seite gesetzt) über eine gekrümmte Fläche ohne Rotation herabgleitet, und die treibende Kraft P seine eigene Schwere $r^2 \pi l \gamma$ ist, wobei also die Berührungslinie zwischen Cylinder und Fläche stets sich ändert (ausser wenn die Krümmung einer Gleichung des ersten Grades entspricht), in diesem Falle ist $w = 0$, $P = r^2 \pi l \gamma$, $\mu = 0$, und $\text{Sin} \left(\text{Arc. tang. } \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{ds}$, daher $- r^2 \pi l \gamma dy =$
 $= \frac{r^2 \pi l \gamma}{2g} v dv$ woraus folgt $v = \sqrt{c^2 + 4g(H - y)}$,

wenn die anfängliche Tangentialgeschwindigkeit $= c$, und die anfängliche Entfernung von der Abscissenaxe $= H$ waren. Nachdem also der Körper sich dem Horizonte um die senkrechte Höhe $H - y$ genähert hat, ist seine Tangentialgeschwindigkeit v dieselbe, als seine Fallgeschwindigkeit gewesen wäre, wenn er blos durch seine Schwere in senkrechter Richtung auf den Horizont den Raum $H - y$ beschrieben hätte, und am Anfange dieses Fallraums, nach der Richtung des Falles, die Geschwindigkeit c gehabt hätte. Dieser Lehrsatz ist allgemein bekannt. Gesetzt nun, der Cylinder habe (wegen Reibungswiderstand) über die wie immer gekrümmte Fläche gerollt, nicht gegleitet, so ist $\omega = v$, (*)

(*) Anmerkung. Hiebei wird jedoch vorausgesetzt, dass entweder die Krümmung der Fläche einer Gleichung des ersten Grades entspreche, oder dass der Halbmesser r des Cylinders gegen den allgemeinen Krümmungshalbmesser der Curven so klein sey, dass approximative angenommen werden dürfe, es sey die Curve, nach welcher der Cylinder - Mittelpunkt läuft, dieselbe, als

$$P = r^2 \pi l \gamma, \mu = 0, \sin \left(\text{Arc. tang. } \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{ds}, \text{ daher } - r^2 \pi l \gamma \cdot dy = \frac{r^2 \pi l \gamma}{2g} \times$$

$$\times \left(v dv + \frac{r^2}{2} \frac{v dv}{r^2} \right), \text{ daher ist unter den}$$

obigen Bedeutungen der Buchstaben H und c ,

in diesem Falle $v = \sqrt{c^2 + 4g \cdot \frac{2}{3} (H - y)}$.

Nennen wir die gegen den Horizont senkrechte Näherung des Cylinder - Mittelpunkts

$H - y = h$, so ist bei dem Herabgleiten ohne Rotation über irgend eine gekrümmte

Fläche $v = \sqrt{c^2 + 4g \cdot h}$, und bei dem Her-

abrollen über irgend eine gekrümmte Fläche

$v = \sqrt{c^2 + 4g \cdot \frac{2}{3} h}$. Der Mittelpunkt des

über irgend eine gekrümmte Fläche herab-

rollenden Cylinders hat also, nachdem er

sich dem Horizonte um den Raum h genähert

jene, welche die Krümmung der Fläche bestimmt, worauf der Cylinder sich bewegt. Ist die Bewegung kreisförmig,

so ist $r \omega = \left(\frac{R + r}{R} \right) v$ u. s. w. Das im folgenden

Gesagte ist unter der hier gemachten Einschränkung allemal nur zu verstehen.

hat, dieselbe Geschwindigkeit nach der Tangente seiner Bahn, als er gehabt hätte, wenn er über Welch immer eine gekrümmte Fläche ohne Rotation gegleitet wäre, und sich um $\frac{2}{3}$ desselben Raumes h dem Horizonte genähert hätte, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit des Schwerpunktes zu Anfang des Raumes h nach den Tangenten seiner Bahnen in beiden Fällen eine und dieselbe c wären.

Es ist sehr natürlich, dass der rollende Cylinder unter übrigens gleichen Umständen erst nach einem tiefern Falle dieselbe Geschwindigkeit erlange als der blos gleitende, da im ersten Falle nicht die ganze Schwerkraft auf die fortschreitende Bewegung verwendet wird, indem ein Theil derselben auf Rotation wirken muss. Setzt man in beiden Fällen $c = 0$, so hat man $v = 2\sqrt{gh}$ und $v = \sqrt{g\frac{2}{3}h}$. Man vergleiche diese Betrachtung mit jener am Ende des §. 28.

§. 30.

Ich habe in der schon öfters erwähnten

analytischen Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in den Paragraphen 20 bis 23 den dynamischen Zustand einer von Kräften wie immer ergriffenen frei schwebenden Masse auf einem sehr einfachen Wege erwiesen. Dieser Lehrsatz der physischen Astronomie ist zwar nicht neu; indessen glaube ich, dem Vortrage der Dynamik dadurch einen Dienst geleistet zu haben, dass ich diesen Satz, nach Vorausschickung sehr weniger Blätter bewiesen habe, indem hierdurch der Vortheil für die Schüler der Dynamik entsteht, dass sie, aus diesem Lehrsatz ausgehend, eine Menge Sätze erweisen können, wozu nach andern Methoden, die Beweise viel weitläufiger und schwieriger werden. Ein Beispiel hievon mag uns der im vorhergehenden Paragraphe aufgestellte Satz, über das Rollen eines schweren Cylinders über eine gekrümmte Fläche abgeben.

Betrachten wir binnen irgend einem dt den Cylinder als eine freischwebende Masse, die (parallel zur Tangente der Mittelpunkts-

bahnen) im Schwerpunkte durch die Kraft $r^2 \pi l \gamma \frac{dy}{ds}$ und am Berührungspunkte mit der gekrümmten Fläche durch die unbekannte Kraft z nach der Kreistangente des Cylinderquerschnittes, und zugleich der Richtung von $r^2 \pi l \gamma \frac{dy}{ds}$ entgegen gesetzt ergriffen wird, so ist die Gleichung wahr:

$$\frac{dv}{r^2 \pi l \gamma} = 2g \left(r^2 \pi l \gamma \frac{dy}{ds} - z \right) dt;$$

und jene $\frac{d\omega}{2g dt} = \frac{dv}{2rg dt} = \frac{2rz}{r^2 \pi l \gamma \cdot r^2},$

woraus $z = \frac{1}{3} r^2 \pi l \gamma \cdot \frac{dy}{ds}$ folgt. Da ferner

$dt = \frac{ds}{v}$ ist, so folgt $C + \frac{v^2}{2} = - \frac{4g \cdot y}{3},$

und nach Bestimmung der Konstante

$v = \sqrt{c^2 + 4g \cdot \frac{2}{3} (H - y)}$. Man begreift aus dem hier Gesagten leicht, dass wenn der Cylinder über eine kreisförmig gekrümmte Fläche herabrollt, die Gleichung statt finde,

$$v = \sqrt{c^2 + 4g \cdot \frac{2R^2}{3R^2 + 2Rr + r^2} \cdot h},$$

worinn R der Halbmesser des Kreises ist, den der Cylinder - Mittelpunkt beschreibt.

Ist der schiefen Ebene Neigungswinkel $= \lambda$, so ist beim Gleiten $v = 2g \sin \lambda t = v'$; hingegen beym Rollen $v^2 \pi l \gamma \sin \lambda ds =$
 $= \frac{1}{2g dt} \left(r^2 \pi l \gamma \cdot dv + \frac{2\gamma l \pi \cdot \omega \cdot d\omega \cdot dt \cdot r^4}{4} \right)$
 also $v = \frac{2}{3} \cdot 2g \sin \lambda t = \frac{2}{3} \cdot v'$.

§. 31.

Die statischen Sätze rücksichtlich der schiefen Ebene, und der Anwendungen auf den Keil, die Schraube u. s. w., sind nach der hier vorgetragenen Lehre zu entwickeln allzuleicht, übrigens aber auch schon zu bekannte Gegenstände, als dass ich es der Mühe werth hielt hievon Erwähnung zu thun.

§. 32.

Aus eben den Gründen übergehe ich hier die bekannten Lehrsätze des Cykloidal - Pendels (wobei der über die Cykloide gleitende schwere Körper, ohne alle Rotationsbewegung

zu laufen angenommen wird), und des einfachen sowohl als zusammengesetzten Kreispendels. Nur mache ich darauf aufmerksam, dass der Unterschied zwischen einem Cykloidal und Kreis - Pendel nicht nur darinn besteht, dass im erstern der Körper nach einer Cykloide, im letztern hingegen nach einem Kreisbogen läuft, sondern zugleich auch darinn, dass bei erstern (nach der obigen Vorstellungsart des Cykloidal - Pendels) der schwingende Körper keine rotatorische Bewegung hat, welche hingegen bei einem Kreispendel allemal erfolgt, wenn selbiges dadurch entsteht, dass die Pendellinse an einem Faden oder an einer Stange hängt.

§. 33.

Die Cykloide ist bekanntlich eine jener Curven, welche die Eigenschaft haben, dass ein über selbige durch seine Schwere herabgleitender Körper (allen Widerstand von Reibung, Luft, ... bei Seite gesetzt) von allen Höhen in einerlei Zeit den tiefsten Standpunkt erreicht, wodurch denn diese

Curve, bei einem bloß durch gleitende (nicht rotatorische) Bewegung schwingenden Körper, zu Erhaltung beständig gleicher Schwingungszeiten sehr vortheilhaft wäre. Der Widerstand der Reibung, dessen Anomalien leider so schwer, besonders bei geringem Drucke der sich reibenden Flächen, zu bestimmen sind, macht es unmöglich, ein Cykloidalpendel, nach der hier angenommenen Vorstellungsart, mit Zweckmässigkeit auszuführen. Was den Widerstand der Luft anbelangt, so liesse sich dieser dadurch beseitigen, dass man die Pendelschwingungen im *Vacuo* vor sich gehen liesse.

Leichter liesse sich ein ähnliches Pendel dadurch erhalten, dass man einen recht harten, genau abgedrehten, glatten Cylinder über einen ebenfalls harten Körper rollen liesse, da hiebei der geringe Widerstand der wälzenden Reibung, als sehr unbedeutend, vernachlässigt werden dürfte. Wählt man für die Krümmung dieser Fläche die Cykloide, und macht den Halbmesser r des rol-

lenden Cylinders klein genug, dass er gegen alle Krümmungshalbmesser des zum Pendelschwunge angenommenen Stücks der Cykloide als verschwindend klein angenommen werden darf, so ist beim Rollen des Cylinders die Geschwindigkeit des Cylinder - Mittelpunkts, welche der senkrechten Fallhöhe $y - N$ entspricht $= 2 \sqrt{\frac{2}{3} g} \sqrt{y - N}$, woraus

$$dt = \frac{ds}{2\sqrt{\frac{2}{3}g}\sqrt{y-N}} \text{ folgt. Wäre der Cy-}$$

linder, statt zu rollen, (ohne Friktion) über dasselbe Stück der Curven $s - A$ [A entspricht der Abscisse N] gegleitet, so wäre

$$v = 2 \sqrt{g} \sqrt{y - N} \text{ und } dt = \frac{ds}{2\sqrt{g}\sqrt{y-N}}.$$

Folgt nun aus dieser Differenzialgleichung eine solche Gleichung zwischen t und y , dass der der Abscisse $y = 2 X$ [X der Halbmesser der Scheibe durch deren Rollen auf der Ordinaten - Axe die Cykloide entsteht] entsprechende Werth von t derselbe bleibt, sei N was immer für eine Grösse, wie dieses beim Gleiten über die Cykloide wirklich der Fall

ist, so muss dasselbe auch aus der Differentialgleichung

$$dt = \frac{ds}{2\sqrt{\frac{2}{3}g}\sqrt{y-N}}$$

folgen, da der Werth

der konstanten Grösse $\frac{1}{2\sqrt{g}}$ oder $\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}g}}$

an diesem Gesetze nichts ändern kann.

Unter den oben angenommenen Bedingungen, ist also die nach einer Cykloide gekrümmte Fläche zweckmässig, um gleichförmige Pendel - Schwingungen mittelst eines hin und wieder rollenden Cylinders zu erhalten, und das zwar um so mehr, je grösser alle Krümmungshalbmesser jenes Stückes der Cykloide, das zu diesem Pendel verwendet wird, gegen den Halbmesser des rollenden Cylinders sind.

§. 34.

Um meine Leser mit Gegenständen, die mehr zur Befriedigung der Neugierde dienen, als um hievon eine nützliche Anwendung machen zu können, nicht unnützerweise auf-

zuhalten, will ich hier nur ganz kurz den Weg anzeigen, auf welchem die Auflösung folgender Aufgabe zu finden ist.

Ein Cylinder vom den oben gegebenen Dimensionen rolle über eine ebene aber schiefe Fläche von Neigungswinkel λ dergestalt herab, dass er während dem Herabrollen zwar immer cylindrisch bleibt, aber seinen Durchmesser durch Aufnehmen ruhender Massentheilchen beständig fort vergrößert, wodurch jedoch an seinem spezifischen Gewichte nichts geändert wird. [Man denke sich z. B. einen Cylinder aus Schnee, welcher über eine mit Schnee gleichförmig aber nur ganz dünne bedeckte schiefe Ebene herabrollt, und während dem Rollen beständig die Ebene ganz vom Schnee entblösst, so dass die Dicke der sich um den Cylinder wickelnden Schneerinde beständig dieselbe μ bleibt]. Man betrachte diese Bewegung nur so lange, als der veränderliche Halbmesser ρ des Cylinders noch wenig genug zugenommen hat, dass man annehmen könne, es habe sich der

Mittelpunkt des Cylinders nach einer geraden Linie bewegt. Welches Bewegungsgesetz findet binnen dieser Beobachtungszeit statt? Es ist wegen des hier mit der Geschwindigkeit $= 0$ beitretenen Massen-Inkrement, und da $ds = v dt$, ferner $\omega = \frac{v}{\rho}$ ist, die Gleichung wahr: $\rho^2 \pi l \gamma \sin \lambda ds = \frac{3 \rho^2 \pi l \gamma}{4g} \cdot v dv + \frac{\gamma l \omega}{g} v^2 ds - \frac{\pi l \gamma}{4g} \cdot r^2 \rho d\rho$, worinn nun ρ durch r und s ausgedrückt werden muss, u. s. w.

§. 35.

Denken wir uns einen Cylinder auf einer horizontalen Ebene, setzen allen Reibungswiderstand bei Seite, und nehmen an, er werde in seinem Schwerpunkte von der Kraft p ergriffen, so gleitet er mit gleichförmig beschleunigter Bewegung längs dieser Ebene fort, und nach der Zeit t hat die Kraft p die Menge von Bewegung $= 2 \cdot g \cdot p \cdot t = q$ hervorgebracht. Bestand hingegen Reibung, so, dass der Cylinder nicht gleitete, sondern

rollte, so ist am Ende der Zeit t rücksichtlich des Fortschreitens, dessen Geschwindigkeit $v = \frac{4}{3} \frac{gP}{r^2 \pi l \gamma} \cdot t$, und rücksichtlich der Rotation, deren Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{4}{3} \frac{g \cdot p \cdot t}{r^3 \pi l \gamma}$; daher die durch die Kraft p binnen der Zeit t im Ganzen hervorgebrachte Quantität an Bewegung $= \frac{10}{9} q$. Hier hat also einerlei Kraft p , an zweierlei Systemen von Massen so angebracht, dass sie in beiden Fällen ganz, nemlich ohne Verlust irgend einer Seitenkraft, wirkte, in einerlei Zeit nicht einerlei Quantität an Bewegung hervorgebracht. Diese Betrachtung führt auf Begriffe, die ich unter dem Titel *Isodynamismus* etwas mehr erörtern will. Ehe ich aber zum *Isodynamismus* übergehe, sage ich noch ein paar Worte über das Schwungrad, und über die Möglichkeit der ungleichförmigen Bewegung, als Resultat der Trägheit der Masse. Die Theorie des Schwungrades bezieht sich auf eine spezielle Anwendung des

allgemeinen Grundsatzes, welchem gemäss man sich der gleichförmigen Bewegung in jenen Fällen nähern kann, wo zwischen den an einerlei System wirkenden Kräften kein statisches Gleichgewicht besteht. Diess zeige ich hier:

Nimmt man an irgend einem Systeme von zusammenhängenden Massen und Angriffspunkten der Kräfte sämtliche Massen als beständig an, so besteht die Gleichung

$$p \, d\mathfrak{s} + p' \, d\mathfrak{s}' + p'' \, d\mathfrak{s}'' + \dots = \\ = \frac{1}{2g \, dt} \left(\delta q \cdot ds + \delta q' \cdot ds' + \delta q'' \cdot ds'' + \dots \right)$$

[§. 18.], woraus es leicht ist, jene abzulei-

$$\text{ten: } p \, v \, dt + p' \, v' \, dt + p'' \, v'' \, dt + \dots = \\ = \frac{1}{2g} \left(m \, v \, dv + m' \, v' \, dv' + m'' \, v'' \, dv'' + \dots \right).$$

Hier beziehen sich die Endesgeschwindigkeiten $v, v', v'', \dots$ auf die Richtungen der Kräfte $p, p', p'', \dots$ nicht auf die Richtungen der Bewegungen der Angriffspunkte dieser Kräfte; hingegen sind die Endesgeschwindigkeiten $v, v', v'', \dots$ nach den Richtungen der Bewegungen der Massen $m, m', m'', \dots$ zu nehmen.

Bezeichnen wir die Endesgeschwindigkeit jenes Punktes N des Systems, dessen Approximation zur gleichförmigen Geschwindigkeit wir beabsichtigen, durch w , so lassen sich die Geschwindigkeiten $v, v', v'', \dots$, ferner $v, v', v'', \dots$, welche (wegen des Zusammenhangs aller Punkte des Systems unter einander) Funktionen von w seyn müssen, durch $f(w), f^+(w), f^{++}(w), \dots$, ferner durch $F(w), F^+(w), F^{++}(w), \dots$ ausdrücken. Hieraus folgt die Gleichung (wenn man die Bezeichnungsart der abgeleiteten Funktionen des Herrn de la Grange aus dessen *Théorie des fonctions analytiques* entlehnt):

$$dw = \frac{2g(vf(w) + v'f^+(w) + p''f^{++}(w) + \dots)dt}{mF'(w)F(w) + m'F^+(w)F^+(w) + m''F^{++}(w)F^{++}(w) + \dots}$$

Die Bewegung des betrachteten Punktes N wird sich daher der gleichförmigen Bewegung um so mehr nähern, je grösser der Nenner des obigen Ausdrucks ist, wenn blos die Anordnung der Massen zu diesem Endzwecke berücksichtigt wird. Ist die Anordnung der Massen so getroffen, dass $F(\omega) = A\omega$, $F^+(\omega) = B\omega$, $F^{++}(\omega) = C\omega$, ... ist, wie diess z. B. allemal dann der Fall ist, wenn alle Massen und der Punkt N im Kreise sich bewegen, so erhält man eine der gleichförmigen Bewegung sich um so mehr nähernde Bewegung für den Punkt N , je grösser die Summe $m A^2 + m' B^2 + m'' C^2 + \dots$ ausfällt. Was ist aber diess anderes, als der analytisch ausgedrückte Lehrsatz des Schwungrades?

Noch eine interessante, zu dem Artikel der Bewegung auf vorgeschriebenen Wegen gehörige Bemerkung ist folgende: Man denke sich ein System von Massen m , m' , m'' , ..., deren jede nur nach einer bestimmten krummen Linie bewegt werden kann,

jedoch so, dass eine gegebene Bewegung der einen Masse bestimmte Bewegungen der übrigen bewirkt; nehme ferner an, dass jede dieser Massen bloß eine fortschreitende und keine rotatorische Bewegung besitze, so lässt sich für das Bewegungsgesetz dieser Massen die bekannte Gleichung

$$p \, d\zeta + p' \, d\zeta' + p'' \, d\zeta'' + \dots$$

$$= \frac{1}{2g} \left(m v \, dv + m' v' \, dv' + m'' v'' \, dv'' + \dots \right)$$

anwenden; hieraus folgt

$$p\zeta + p'\zeta' + p''\zeta'' + \dots =$$

$$= \frac{1}{4g} \left(m v^2 - m c^2 + m' v'^2 - m' c'^2 + \right.$$

$$\left. + m'' v''^2 - m'' c''^2 + \dots \right)$$

wenn $c, c', c'', \dots$ die Geschwindigkeiten der Massen $m, m', m'', \dots$ zu Anfange der Zeit t ausdrücken. Da diese Gleichung in ihrer grössten Allgemeinheit wahr seyn muss, so bleibt sie es auch, wenn man die bewegenden Kräfte, oder die in bestimmte Punkte des Systems angebrachten Drucke $p, p', p'', \dots = 0$ setzt; für diesen Fall erhält man

aber die Gleichung $m v^2 + m' v'^2 + m'' v''^2 +$
 $+ \dots = m c^2 + m' c'^2 + m'' c''^2 + \dots$

Da sich nun der Fall sehr leicht so annehmen lässt, dass nie die verschiedenen Massen zu gleicher Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegen können, so sieht man ein, wie in einem Systeme von Massen, ohne Einwirken von bewegenden Kräften, also bloß nach dem Trägheitsgesetze, Bewegungen dieser Massen mit ungleichförmigen Geschwindigkeiten in alle Ewigkeit fort möglich sind, und dass das Gesetz der Trägheit in der allgemeinsten Beziehung, bloß den konstanten Werth für die Summe der Produkte aus den Quantitäten der Bewegungen in die einzelnen denselben entsprechenden Geschwindigkeiten, postulire. Nimmt man bloß zwei Massen an, so erhält man $m v^2 + m' v'^2 = m c^2 + m' c'^2$, also dasselbe Gesetz, als beim konzentrischen Stosse vollkommen elastischer freischwebender Körper.

Ganz dasselbe, was hier für den Fall

gezeigt wurde, wo man die Kräfte $p, p', p'', \dots$ verschwinden liess, ist auch von dem Falle wahr, wo man den Kräften $p, p', p'', \dots$ endliche Werthe beilegt, dabei aber annimmt, es sei in jedem Zeitmomente $p \, d\zeta + p' \, d\zeta' + p'' \, d\zeta'' + \dots = 0$, d. h. es bestehe ein beständiges statisches Gleichgewicht.

§. 36.

Der Isodynamismus. Ich verstehe hier unter dem Ausdrücke *Isodynamismus* jenen Zustand, wo in mehreren Fällen, binnen einerlei Zeit t , gleiche Quantitäten der Bewegung, ohne Rücksicht auf die Richtungen der Bewegungen der einzelnen Elementartheile der Massen eines und desselben Systems, hervorgebracht werden, und nenne dergleichen Fälle isodynamische Fälle (*).

(*) Anmerkung. Hiebei ist jedoch zu merken, dass ich jene Quantitäten der Bewegung zusammen addire, welche aus der fortschreitenden Bewegung allein, und welche aus der rotatorischen allein entstehen, um die ganze Quantität der Bewegung zu erhalten.

Man würde weit fehlen, wenn man behaupten wollte, dass gleich grosse beständige Kräfte p, p, p , welche in verschiedenen Fällen, ohne allen Verlust irgend einer Seitenkraft, angewendet werden, allemal den *Iso-dynamismus* zum Resultate haben müssen. Diese Behauptung ist allgemein nur dann wahr, wenn von Beschleunigungen verschiedener Massen die Rede ist, die ohne alle Rotation nach beliebigen Curven getrieben werden, und wobei in jedem Zeitelemente die Kraft nach der Tangente der Curven wirkt; denn in allen diesen Fällen ist die Summe der Bewegungsquantitäten am Ende der Zeit $t = 2gpt$.

Der *Isodynamismus*, als wissenschaftlicher Gegenstand betrachtet, begreift alle jene Untersuchungen in sich, wodurch ausgemittelt wird, welche Bedingnisse bei Vergleichung verschiedener Fälle statt finden müssen, damit diese Fälle *isodynamisch* werden. Die Bestimmungen hiebei beziehen sich theils auf das kombinirte dynamische Bestreben,

als Druck betrachtet, theils auf die Massen, theils auf die Anordnung des Systems der Massen und der Angriffspunkte der Kräfte, wobei diese Rücksichten auch dahin ausgedehnt werden können, dass man jede derselben als, nach einem Gesetze der Stätigkeit, veränderlich betrachten kann.

Wie reichhaltig an interessanten spekulativen (vielleicht auch für die Anwendung nützlichen) Untersuchungen dieser Gegenstand sei, wird Jeder einsehen, der darüber nur ein wenig nachdenkt. Eine Erörterung desselben müsste, dünkt mir, für die Erweiterung der Philosophie der Dynamik viel beitragen. Ich muss indessen offenherzig gestehen, dass ich hierüber noch zu wenig nachgedacht habe, um eine allgemeine Ansicht des Gegenstandes fassen zu können. Ich begnüge mich demnach, hier blos beispielsweise etwas darüber vorzutragen.

Eine physische Linie von der Länge l und dem (unendlich kleinen) Querschnitte g , von gleicher Dichtigkeit, so dass das Gewicht

der kubischen Einheit ihrer Masse $= \gamma$ ist, wird im Schwerpunkte von der Kraft p ergriffen, und von selbiger in gerader Richtung fort beschleunigt. Dieselbe physische Linie wird an eine bloß mathematische, unbiegsame Linie (ohne Masse) der Länge nach befestigt, welche letztere nur um einen ihrer Endpunkte in einer Ebene gedreht werden kann, so dass die physische Linie nicht anders, als im Kreise zu bewegen ist, und hiebei immer die Lage des Halbmessers behauptet; die Entfernung des Mittelpunktes dieses Kreises vom nähern Endpunkte der physischen Linie sei $= a$; die Kraft x ergreift die physische Linie in ihrem Schwerpunkte, und wirkt beständig nach der Tangente des Kreises (welcher die einzig mögliche Bahn dieses Schwerpunkts ist) von Halbmesser $a + \frac{l}{2}$.

Wie gross muss die Kraft x seyn, damit der zweite Fall mit dem erstern isodynamisch werde?

Sucht man, für die Kreisbewegung, nach

den sehr bekannten und leichten Methoden, die der Zeit t entsprechende Tangentialgeschwindigkeit v des Schwerpunkts der physischen Linie, und hieraus die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{a + \frac{l}{2}}$, derselben, rücksichtlich ihrer Rotation um ihren Schwerpunkt, so findet man die wegen derselben statt habende Quantität der Bewegung um

$$\text{besagten Schwerpunkt} = \frac{6g(a + \frac{l}{2})^2 x \cdot t}{3a^2 + 3al + l^2},$$

welche zu der, wegen der fortschreitenden Bewegung, statt findenden Quantität der Bewegung addirt, die ganze Quantität der

$$\text{Bewegung} = \frac{(gl + 12a)g(a + \frac{l}{2})x \cdot t}{6a^2 + 6al + 2l^2}$$

gibt. Die Richtigkeit dieser Formel zeigt sich, wenn man $a = \infty$, und $x = p$ setzt, denn dann erhält man die dem ersten Falle entsprechenden Bewegungsquantitäten $= 2gpt$. Die Solution der Aufgabe ist also algebraisch so ausgedrückt:

$$x = \frac{2(6a^2 + 6al + 2l^2)p}{(gl + 12a)(a + \frac{l}{2})}. \quad \text{Hieraus}$$

sieht man, dass wenn die physische Linie um einen ihrer Endpunkte durch die, in ihrer Mitte angebrachte, auf sie senkrecht wirkende Kraft x im Kreise beschleunigt wird, für das Eintreten des *Isodynamismus* seyn müsse die Kraft $x = \frac{8}{9} p$.

Wird dieselbe physische Linie, welche wir als freischwebend betrachten, einmal von der Kraft p im Schwerpunkte, und einmal von der Kraft x an einem ihrer Endpunkte so ergriffen, dass in beiden Fällen die Richtung der Kraft auf der physischen Linie senkrecht ist, so ist der für den *Isodynamismus* erforderliche Werth von $x = \frac{2}{3} p$, wie dieses aus dem bekannten Lehrsätze leicht gefunden wird, welchen ich in meiner analytischen Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 20 bis 23) erwiesen habe.

Wird ein Cylinder aus gleich dichter Masse, einmal im Schwerpunkte von der Kraft p , und einmal an der Peripherie des mittlern Querschnittes (nach der Tangente

dieser Peripherie) von der Kraft x ergriffen, so ist der für den *Isodynamismus* erforderliche Werth von $x = \frac{3}{7} p$.

Bei Beschleunigung einer Masse m durch eine in ihrem Schwerpunkte angebrachte Kraft p (wo also blos fortschreitende Bewegung besteht), welche nach irgend einem Gesetze veränderlich ist, haben wir $dv = \frac{2gp}{m} dt$ also $2g \int p dt = mv$. Dasselbe gilt von einer andern Masse m' und einer nach einem andern Gesetze wirkenden Kraft p' , also ist dann wieder $2g \int p' dt = m'v'$. Soll nun für diese beiden Fälle der *Isodynamismus* eintreten, so muss seyn $\int p dt = \int p' dt$. Bezieht sich also hier der *Isodynamismus* auf jede beliebige Zeit t , so setzt er voraus, dass in beiden Fällen die Kräfte p und p' einerlei Gesetz der Stätigkeit befolgen. Wird hingegen der *Isodynamismus* blos für eine bestimmte Zeit α verlangt, ist ferner die Gleichung zwischen p und t angegeben, kann also $\int p dt = F(t)$ und $F(\alpha) = C$ gesetzt

werden, so wird der Aufgabe ein Genüge geleistet, wenn zwischen p' und t eine solche Gleichung besteht, dass $\int p' d t = f(t)$ so beschaffen ist, dass hiedurch $f(\alpha) = C$ wird.

So wie wir den *Isodynamismus* rücksichtlich der, einer Zeit t entsprechenden Quantität an Bewegung (welche durch die Summe der Produkte aus allen Elementartheilen der zu einerlei System gehörigen Massen in deren Endesgeschwindigkeiten ausgedrückt wurden) betrachtet haben, eben so lässt sich der *Isodynamismus* auf die einer Zeit t entsprechende Quantität an Räumen beziehen, welche sich durch die Summe der Produkte aus allen Elementartheilen, der zu einerlei System gehörigen Massen, in die binnen der Zeit t durchlaufene Räume ausdrücken lässt.

Hieraus ergibt sich demnach die allgemeine Definition des *Isodynamismus*, und dessen wesentlichste Eintheilung in jenen rücksichtlich der Quantität der Bewegung

(oder lieber der Endesgeschwindigkeit), und in jenen rücksichtlich der Quantität des Raumes.

§. 57.

Bei den, in den vorausgeschickten Paragraphen, gemachten Anwendungen des dynamischen Lehrsatzes der virtuellen Geschwindigkeiten, trenne ich die fortschreitende von der rotatorischen Bewegung, und betrachte jede für sich, weil hiedurch in den meisten Fällen die Betrachtung weit leichter wird, als wenn man blos die wirklichen Bewegungen der einzelnen Elemente berücksichtigt.

Ueberhaupt darf ich es, für die Auflösung vieler schwierigen Aufgaben, einen glücklichen Kunstgriff nennen, die fortschreitenden und rotatorischen Bewegungen von einander zu trennen. Diess zu thun gestattet aber wohl kein dynamischer Lehrsatz auf eine so leichte und einfache Art, als der in dieser Schrift vorgetragene der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 58.

Ich muss indessen hier, über die erwähnte Methode, mittelst der Trennung der fortschreitenden von der rotatorischen Bewegung eine Bemerkung machen, welche von der höchsten Wichtigkeit ist, wenn, durch falsche Anwendung des hier Gesagten, mein dynamischer Lehrsatz nicht in Misskredit fallen soll.

Wenn ich meinen dynamischen Lehrsatz der virtuellen Geschwindigkeiten unter der Modalität anwende, dass ich die fortschreitende von der rotatorischen Bewegung trenne, und es ist diese Trennung eine *Fiction*, d. h. die Trennung beruht nicht auf dem Zusammenhange des Systems, und der hiedurch wirklich statt, habenden zweierlei Bewegungen, so beziehen sich diese zweierlei Bewegungen allemal auf den Schwerpunkt derjenigen Masse, woran diese zweierlei Bewegungen berücksichtigt worden: denn nur unter diesem Gesichtspunkte betrachtet, sind die

fingirten zweierlei Bewegungen nicht mehr blossе Fiktionen, nicht blos hypothetisch, sondern reell, da ein von Kräften wie immer ergriffener Körper allemal eine fortschreitende Bewegung seines Schwerpunkts, und eine rotatorische um seinen Schwerpunkt erhält (wie diess in meiner analytischen Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht §. 20. erwiesen ist). Wird z. B. eine Stange um das eine Ende um eine fixe Axe durch eine Kraft im Kreise beschleunigt, so kann ich zwar annehmen, diese Bewegung entstehe dadurch, dass irgend ein Punkt der Stange fortschreite, und zugleich um diesen Punkt die Stange sich drehe, allein diese fingirten Bewegungen bleiben in so lange blossе Fiktionen, auf die ich meinen dynamischen Lehrsatz nicht anwenden darf, als ich für diesen Punkt nicht den Schwerpunkt der Stange annehme; denn nur von diesem kann ich behaupten, dass seine fortschreitende Bewegung und die um

ihn bestehenden rotatorischen Bewegungen und die wirkliche Bewegung der Stange constituiren.

Ich will das Gesagte beispielweise erläutern. Betrachten wir bei der besagten Stange, die durch die am Halbmesser r wirkende Tangentialkraft p im Kreise beschleunigt wird (für die fortschreitende und rotatorische Bewegung), jenen Punkt, welcher von der fixen Axe um die Länge α und vom Ende der Stange um die Länge β absteht ($\alpha + \beta = l$), und wenden unsern dynamischen Lehrsatz der virtuellen Geschwindigkeiten darauf an, so ist es leicht auf die Formel zu gerathen (ω die Winkelgeschwindigkeit)

$$\frac{d\omega}{2gdt} = \frac{3rp}{5\gamma ql\alpha^2 + \gamma q(\alpha^3 + \beta^3)}. \quad \text{Nun}$$

ist aber wirklich $\frac{d\omega}{2gdt} = \frac{5rp}{\gamma ql^3}$. Dieses richtige Resultat folgt aber aus der ersten Gleichung nur in jenen zwei Fällen, wo man entweder $\alpha = 0$ und $\beta = l$, oder wo man $\alpha = \frac{l}{2}$ und $\beta = \frac{l}{2}$ setzt, in welchen bei-

den Fällen allein die wirkliche Bewegung der Stange betrachtet wird.

Ein anderes Beispiel ist folgendes: Eine unbiegsame Stange ohne Masse könne nicht anders bewegt werden, als an dem einen Ende um eine fixe Axe. An dieser Stange sind, in den Abständen E und e von der fixen Axe, die Massen M und m befestigt (deren jede in einem Punkte konzentriert angenommen wird); endlich wirkt senkrecht auf die Stange die beständige Kraft p in der Entfernung r von der fixen Axe.

Fingirt man hier abermals eine fortschreitende Bewegung eines Punktes der Stange und eine zugleich bestehende rotatorische um selbigen, und nennt α den Abstand dieses Punktes von der fixen Axe, so ist es leicht, durch Anwendung des dynamischen Lehrsatzes der virtuellen Geschwindigkeiten, auf folgende Gleichung zu gerathen:

$$\frac{d\omega}{2g dt} = \frac{rp}{2\alpha^2(M+m) - 2\alpha(ME+me) + me^2 + ME^2}$$

nun ist aber wirklich $\frac{d\omega}{2gdt} = \frac{rp}{me^2 + ME^2}$,

welche letztere Gleichung aus ersterer in jenen zwei Fällen sich auch wirklich ergibt,

wo man $\alpha = 0$, und wo man $\alpha = \frac{ME + me}{M + m}$

annimmt; es ist aber bekanntlich $\frac{ME + me}{M + m}$

der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunkts der Massen M und m von der fixen Axe.

§. 39.

Die im Artikel *Isodynamismus* angestellten Betrachtungen über die Summe der Bewegungsquantitäten, wenn man des Schwerpunkts fortschreitende Bewegung von der um selbigen bestehenden rotatorischen Bewegung trennt, leiten dahin, zu erkennen, dass eine und dieselbe Kraft in verschiedenen Fällen verschiedene Bewegungsquantitäten zum Resultate haben kann, wenn sie auch in allen diesen Fällen ohne allen Verlust an irgend einer Seitenkraft wirkt. Denken wir uns z. B.

einen gleich dichten Cylinder, vom Querschnittsradius r , von der Länge l , vom spezifischen Gewichte $= \gamma$, und denken uns eine durch den Schwerpunkt des Cylinders auf dessen Axe senkrecht gelegte unbeugsame Scheibe ohne Masse, deren Mittelpunkt in besagten Schwerpunkt fällt, nennen den Halbmesser dieser Scheibe $= x$, und setzen, es wirke nach der Peripherie dieser Scheibe eine beständige Kraft $= p$, so ist die am Ende der Zeit t bewirkte Quantität der Bewegung $= gpt \left(2 + \frac{8x}{3r} \right)$. Die Totalwirkung der Kraft p wächst also durch das Zunehmen der Entfernung x des Angriffspunktes vom Schwerpunkte, durch das Abnehmen des Cylinderhalbmessers. Läge es daher, nach Massgabe der übrigen Umstände der Aufgabe, in der Willkühr der Kraft, sich ihren Angriffspunkt zu wählen, so ergiffe sie die unbeugsame Ebene in jenem Punkte, der so weit vom Schwerpunkte des Cylinders abstünde, als es die übrigen Um-

stände zuliessen, vorausgesetzt, dass es in der Wesenheit der mechanischen Kraft liege, allemal die möglichst grösste Bewegungs-Quantität zu bewirken.

§. 40.

Kräfte von beschränktem Drucke und beschränkter Geschwindigkeit. Betrachten wir das Gesetz der Stätigkeit, nach welchem, bei einem von einer Kraft ergriffenen Angriffspunkte, der jedesmalige Druck auf demselben von dessen Geschwindigkeit abhängt, und beziehen diese Betrachtung auf die uns in der Natur bekannten mechanischen Kräfte, so zerfallen selbige vorzüglich in zwei Hauptklassen. Die erste begreift jene Kräfte in sich, bei denen der jedesmalige Druck auf den Angriffspunkt eine Funktion der nullten Potenz der Geschwindigkeit desselben ist, d. h. wo der Druck für jede Geschwindigkeit gleich gross ist, und diese Kräfte nennen wir Centralkräfte *). Die zweite begreift jene,

(*) Anmerkung. Man wende mir hier nicht ein, dass eine nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation

für die Bedürfnisse des bürgerlichen Lebens so nützlich angewandten Kräfte von beschränktem Drucke und beschränkter Geschwindigkeit in sich, bei denen der Druck auf den Angriffspunkt mit dessen zunehmenden Geschwindigkeit abnimmt, und endlich bei einer (der Natur der Kräfte angemessenen) Geschwindigkeit ganz verschwindet. Die beim Maschinenwesen vorzüglich im Gebrauche stehenden Kräfte dieser Art sind: die Kraft des Windes an den Windmühlenflügeln, Sec-

gegen einen Centralkörper beschleunigte Masse, für jede Geschwindigkeit auch einen derselben entsprechenden Druck nach dem Centralkörper erleide; diese Einwendung wäre gegen den Sinn des hier Gesagten. Die Veränderlichkeit des Druckes mit Veränderung der Geschwindigkeit ist in diesem Falle nicht ein Resultat der Veränderung der Geschwindigkeit, sondern der beständig wachsenden Näherung, und dann ist freilich der Druck dem Quadrate der jedesmaligen Entfernung verkehrt proportional. Es würde aber der Centralkörper auf die angezogene Masse in der Entfernung r ganz denselben Druck ausüben, man möge bei diesem Abstände der Geschwindigkeit v immer einen Werth beilegen.

geln u. s. w., das Wasser am überschlächtigen, unterschlächtigen, halbüberschlächtigen Sack - oder Kropf - Rade, am Segnerischen Wasserrade, am Stossheber, an der Wassersäulenmaschine, jene der durch Einwirkung des Feuers erzeugten Wasserdämpfe an den Dampfmaschinen, endlich jene der Thiere, wozu auch die mechanische Kraft des Menschen gezählt wird.

Was die durch Wind und Wasser erzeugten Kräfte anbelangt, so lassen sich deren Wirkungsarten *a priori* aus bekannten Sätzen der Hydrodynamik, als vorzüglich aus den Gesetzen des hydraulischen Druckes festsetzen, welches letztere sich aus der Bestimmung der Kraft, die erforderlich ist, eine bestehende Quantität an Bewegung in bestimmter Zeit zu tilgen, ableiten lässt; und wenn man gleich der Hydrodynamik mit einigem Rechte, vorzüglich in Bezug auf den Windstoss den Vorwurf machen kann, dass die mit allem Scharfsinne der Analyse aufgestellten Gesetze über die Wirkung des Windes und Wassers

auf obenerwähnte Arten, mit der Erfahrung oft sehr schlecht übereinstimmen, so darf doch Jener, der mit dem itzigen Zustande der Mathematik bekannt ist, und der die Riesenschritte kennt, deren sich diese Wissenschaft seit dem an ihrem Horizonte emporgestiegenen mächtigen Gestirne des Infinitesimalkalkuls rühmen darf, mit Zuversicht hoffen, dass in diesem schwierigen Gegenstande im Kurzen die analytische Hydrodynamik der Ausübenden wird solche Gesetze ankündigen können, denen sich auch der blosse Praktiker gerne unterwerfen wird, wenn anders sein Sträuben gegen die Theorie nicht aus unreinen Quellen entspringt. Man darf selbst schon itzt, ohne zu fürchten, einen merklichen Fehler zu begehen, in der Ausübung folgende Gleichung annehmen:

Beim overschlächtigen Rade ohne Mantel.

$$P = M \gamma \left(\frac{c - v}{2g} + \frac{5}{6} \frac{d}{v} \right).$$
 Beim overschlächtigen Rade mit Mantel $P = M \gamma \left(\frac{c - v}{2g} + \frac{d}{v} \right).$
 Beim unterschlächtigen Rade sowohl im Schuss-

gerinne als im unbegrenzten Wasser $P =$
 $= \left(\frac{c - v}{2g} \right) M \gamma$. Bei halb überschlächtigen

Kropf- oder Sackrädern $P = M \gamma \left(\frac{c - v}{2g} + \frac{n}{v} \right)$,

wie dieses deutlich in des Herrn geheimen
 Oberbauraths von Eytelwein's Handbuche
 der Hydraulik erklärt wird. In diesen Gleichungen ist P der Druck an der Peripherie
 des Wasserrades nach deren Tangente bei
 deren Geschwindigkeit v ; ferner c die Geschwindigkeit des Wassers vor dem Ankommen an die Schaufeln, $M \gamma$ die in jeder Sekunde zur Wirksamkeit anlangende Wassermenge (dem Gewichte nach), g die Beschleunigung der Schwere, d der Durchmesser des Theilrisses, n die Höhe des wasserhaltenden Bogens (*).

Auch die Wirkungsart der Wasserdämpfe
 in den bisher bekannten Arten von Dampf-

(*) Anmerkung. Ueber diese Gegenstände verdienen nachgelesen zu werden: Theorie des Wasserstosses in Schussgerinnen von Ritter von Gerstner. Abhandlung über die überschlächtigen Räder von demselben.

maschinen, jene (in der Ausübung ohnehin verworfene) vielleicht ausgenommen, wo die Dämpfe, nach Art des Wassers am Segnerischen Rade, durch Rückwirkung treiben, lässt sich *a priori* begründen, wenn man hierbei den sehr einfachen, für den *Calcul* so bequemen, und neuerdings von Dalton unleugbar bestätigten Satz entlehnt, dass die Dämpfe, bei unveränderter Temperatur und über jenes *Volum* ausgedehnt, unter welchem sich ein Theil der Dämpfe *condensiren* würde, das Mariott'sche Gesetz befolgen; ferner, wenn man die aus Daltons neuen Lehren und Soldners Formeln, zur Bestimmung der Menge der Verdampfung, gelieferten Sätze hierbei benützt, um jenen Zuwachs von Dämpfen mit in Anschlag zu bringen, welcher während dem Steigen des Kolbens (bei Dampfmaschinen, mit einfacher Wirkung) und während dem Steigen und Sinken (bei jenen mit doppelter Wirkung) entsteht (*).

(*) Anmerkung. Das wichtigste hierüber findet sich in Gilberts Annalen der Physik, mit jener Deut-

Nun kommen wir aber zu den thierischen Kräften, deren Erregung ein Resultat der Lebenskraft, des Animalismus, der Willkühr der Thierseele ist. Wie denn die Wirkungsart dieser bestimmen? Bei solchen Uebergängen aus der anorganischen in die organische Natur, erleidet der die Naturgesetze stets aus sich selbst hervorrufende Mathematiker die Demüthigung, seine Unvermögenheit zu fühlen; hier sieht er die Bedingnisse des Forschens seinem Massstabe entweichen, er vermisst die ihm gewohnten evidenten Anschauungen; denn was vermag des Menschen Geist wohl unbezweifelt auszusprechen, das nicht auf ein Messen sich stützte? In solchen Fällen schäme er sich nicht, von seinem hohen Schwunge etwas abzulassen und dem Pfade der Erfahrung zu folgen, worauf er oft den Schlüssel zu wichtigen Entdeckungen selbst in der Sphäre sei-

lichkeit und in jener systematischen Ordnung die diesen Annalen überhaupt eigen sind.

nes höhern Wirkens finden wird. Giengen denn nicht die Keplerischen Gesetze der physischen Astronomie des Newton voran?

Soviel lässt sich aus den bisherigen Versuchen und den hieraus gefolgerten Combinationen behaupten, man dürfe in der Ausübung rücksichtlich der Wirkungsart bei thierischen Kräften die Gleichung $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \left(\frac{C - v}{C} \right)$ annehmen, worinn $\mathfrak{A}$ und C den grössten Druck und die grösste Geschwindigkeit der Thiere, deren das Thier fähig ist; $\mathfrak{D}$ den der Geschwindigkeit v des Angriffspunktes entsprechenden Druck auf selbigen, ausdrücken; wobei jedoch alles dahin bezogen werden muss, dass man von einer bestimmten Arbeitszeit ohne Erschöpfung des Thieres spricht. $\mathfrak{A}$ ist also nicht der Druck, C nicht die Geschwindigkeit, deren das Thier fähig ist, und welche es ausüben wird, um einen augenblicklichen Widerstand zu überwältigen, um einer augenblicklichen Gefahr zu entwei-

chen u. s. w. Schon diese Rücksichten zeigen, wie unbestimmt überhaupt dieser Gegenstand ist.

Vielleicht liesse sich das Gesetz zwischen Geschwindigkeit und Druck (beide auf den Angriffspunkt der Kraft bezogen bei der thierischen Kraft dadurch *a priori* ausmitteln, dass man durch den Variationskalkül ein *Minimum* des Kraftaufwandes zur Erreichung jenes Endzwecks bestimmte, welchen die Natur hatte, als sie dem Thiere seine Kraft verlieh. Sehr schmeichelhaft für die Eigenliebe des sich zum einzigen Zwecke der Schöpfung so gerne aufdringenden Menschen wäre es freilich, diesen Endzweck in Verrichtung der grösstmöglichen Arbeit zu seinen Bedürfnissen zu setzen, und vielleicht möchte die Richtigkeit dieses Machtspruches auch manchem Mathematiker sehr einleuchtend scheinen. Betrachten wir aber die Natur in jenen Gegenden, wo des Menschen tyrannische Willkühr dem Wirken der übrigen Geschöpfe noch keine gezwungenen Bah-

nen vorgeschrieben hat, so scheint die Thierkraft ganz andere Endzwecke zu haben. Mechanische Momente auszuüben, mag wohl bei freien Thieren die geringste Beschäftigung seyn, wenn wir auch das Bauen der Nester, der Häuser der Biber, das Erlegen der Beute u. s. f. mit berücksichtigen. Der Hauptendzweck der Thierkraft mag wohl darin liegen, sich von einem Orte zum andern zu bewegen, es sey nun, um zu fliehen, oder um das Fliehende zu erhaschen.

Nennen wir das mechanische Moment der Thierkraft den in jeder Sekunde über einen Fuss fortbewegten Gegendruck, wenn das Thier mit der vortheilhaftesten Geschwindigkeit arbeitet, so wird von Mehrern angenommen, für das mechanische Moment des Pferds = 400 Pfund, für jenes des Menschen 60 Pfund. Allein in dem vor kurzem erschienenen Werke *Traité élémentaire des machines, par Hachette*, worinn viel Wichtiges für den praktischen Maschinenerbauer ist, und worinn die Versuche an den in Frankreich so bedeuten-

den technischen Anstalten angegeben sind, ist das mechanische Moment des Menschen nur auf 17 Pfund, und jenes des Pferdes nur auf 130 Pfund bestimmt (Seite 9 und 10) (*).

§. 41.

Eine Maschine ist im Beharrungsstande, wenn die Bewegung dabei gar nicht, oder wenigstens nicht allzu merklich von der gleichförmigen Bewegung abweicht, in welchem letztern Falle nebstbei noch der Umstand vorhanden seyn muss, dass nach gleich grossen Perioden, dieselbe Reihe von Bewegungen

(*) Anmerkung. Herr Hachette gibt unter Andern folgende interessante Resultate an: Am Stossheber ist der ökonomische Effekt $= \frac{6}{10}$ des mechanischen Moments der Kraft. Bei durch unterschlächtige Räder getriebenen Pumpen ist der ökonomische Effekt $= \frac{1}{10}$ des mechanischen Moments der Kraft. Bei Dampfmaschinen ist der ökonomische Effekt höchstens $\frac{4}{10}$ der totalen Arbeit, die sie, ohne Nebenhindernisse, blos theoretisch berechnet ausüben sollte, wie bei der zu Tarnowitz; bei den Dampfmaschinen zu Chaillot und Littry zeigt sich nur $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{17}$ für den ökonomischen Effekt.

wieder eintrete. So ist z. B. eine mit Krummzapfen versehene Maschine im Beharrungsstande, wenn einerlei Warze in ihrem tiefsten Stande allemal einerlei Geschwindigkeit hat, denn dann gehen alle Rotationen der Krummzapfenaxe von einem Ausgehen aus diesem tiefsten Punkte, bis zu einem Ankommen dahin, nach einerlei Art vor sich, wenn die übrigen Umstände für jede solche Rotation sich nach einerlei Weise wiederholen. Jede solche Periode, bei einer im Beharrungsstande befindlichen Maschine, binnen welcher sich alles wie in der gleich grossen vergangenen Periode wiederholt, nenne ich einen mechanischen *Cyclus*. Je kürzer die Dauer des mechanischen *Cyclus* ist, desto gleichförmiger ist die Bewegung der Maschine, bei übrigens gleichem Gesetze der Ungleichförmigkeit binnen jedem *Cyclus*. Dieser Betrachtung gemäss, ist z. B. (für die Gleichförmigkeit der Bewegung) eine Krummzapfenaxe mit n Armen vorthellhafter, als jene mit $n + 1$ Armen, wenn n eine ungerade Zahl

ist; denn es tritt binnen jeder Rotation der Krummzapfenaxe dieselbe Geschwindigkeit $4 n^{\text{mal}}$ und $2 m^{\text{mal}}$ wieder ein, wenn n eine ungerade, hingegen m eine gerade Zahl ist, wenn ferner n und m die Anzahl der Arme an zwei betrachteten Krummzapfenaxen ausdrücken.

§. 42.

Betrachten wir die Wirkungen der mechanischen Kräfte in der grossen Werkstätte der Natur, wozu uns das Studium der physischen Astronomie ganz vorzüglich reichhaltigen Stoff liefert, so bemerken wir hiebei die vollkommenste Zweckmässigkeit, d. h. eine solche Verwendung dieser Kräfte, wodurch sie den, ihrer Natur nach grösstmöglichen, Effekt leisten. Vermuthlich würden wir dieselbe weise Anordnung an den übrigen Kräften bemerken, wenn wir im Stande wären, sie dem *Calcul*, eben so wie die mechanischen, zu unterwerfen. Das Streben, sich dem Urbilde der Gottheit möglichst zu

nähern, nebst dem aber auch die aus dem bürgerlichen Verein entspringende Pflicht, die uns zu Gebote stehenden Kräfte mit möglichster Sparsamkeit zur Erreichung solcher Wirkungen zu verwenden, wodurch unseren Bedürfnissen Genüge geleistet wird, sind mächtige Beweggründe, uns mit den Relationen zwischen Mitteln und Endzwecken bekannt zu machen. Gedankt sei es der erhabenen Mathematik, haben wir es in dergleichen Untersuchungen rücksichtlich der mechanischen Kräfte zu einem hohen Grade gebracht. Indessen erlaube ich mir über diesen Gegenstand hier einige Bemerkungen beizufügen, welche theils den unmittelbaren Endzweck dieser Schrift erfüllen, theils mir einiges Neue zu enthalten scheinen, da sie mir blos als Resultate meines Nachdenkens bekannt sind.

Ich will hier analytisch die Relation zwischen den an irgend einer Maschine bestehenden Kräften, Widerständen, Massen, und den Bewegungen der einen und der andern,

unter jenem Gesichtspunkte betrachten, wodurch diese Untersuchungen dann als Wegweiser dienen können, wenn es darauf ankommt, bei Verwendung mechanischer Kräfte zu bestimmten mechanischen Endzwecken, hiebei mit möglichster Klugheit, d. h. Sparsamkeit an verwendeten Kräften fürzugehen.

Der Unterschied zwischen Kräften und Widerständen besteht darinn, dass bei ersteren die Angriffspunkte binnen dem Zeitelemente dt nach den Richtungen der Kräfte, bei letztern gegen die Richtungen der Kräfte laufen. Nach dem Geiste meiner analytischen Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten beziehen sich also die in den Gliedern der Gleichung für dieses Gesetz vorkommenden Kraftausdrücke auf Kräfte oder Widerstände, je nachdem diese Kraftausdrücke in positiven oder negativen Gliedern vorkommen; oder die Widerstände sind jene individuelle dynamische Bestrebungen, deren partialer Befolgungen binnen dt negativ sind.

§. 43.

Denken wir uns die an irgend einer Maschine (wobei jedoch entweder gar keine, oder nur eine solche Veränderlichkeit der Masse angenommen wird, dass hierdurch an der Richtigkeit des im §. 35. Gesagten nichts geändert wird) angebrachten Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, ... und Widerstände p , p' , p'' , ... im beständigen statischen Gleichgewichte unter einander, so folgt aus dem im §. 35 Gesagten, und aus der Gleichung $\mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \mathfrak{P}'' d\mathfrak{S}'' + \dots - p d\mathfrak{f} - p' d\mathfrak{f}' - p'' d\mathfrak{f}'' - \dots = 0$ folgender höchst wichtiger Lehrsatz: Es hat unter den eben erwähnten Umständen (rücksichtlich sämtlicher zum Systeme der Maschine gehörigen Massen) die Summe der Produkte aus den Quantitäten der Bewegung in die denenselben entsprechenden Geschwindigkeiten einerlei Werth für jeden beliebigen Zeitpunkt, daher in allen jenen Fällen, wo alle Massentheilchen mit gleichförmiger Bewegung zu gleicher Zeit laufen können, dieselben

beständig fort mit derselben gleichförmigen Bewegung laufen müssen. Allemal ist überdiess die verrichtete Arbeit $\int p \, d\zeta + \int p' \, d\zeta' + \int p'' \, d\zeta'' + \dots$ gleich dem Kraftaufwande $\int P \, d\mathfrak{S} + \int P' \, d\mathfrak{S}' + \int P'' \, d\mathfrak{S}'' + \dots$. Für den speziellen Fall, wo die Kräfte und Widerstände beständige Werthe haben, und wo deren Angriffspunkte gleichförmigen Bewegungen unterliegen, folgt der bekannte Lehrsatz: das mechanische Moment der Kraft ist gleich dem mechanischen Momente des Widerstandes.

§. 44.

Aller Anstrengungen des menschlichen Geistes ungeachtet, die von demselben in der Natur entdeckten mechanischen Kräfte, seinem angeborenen Herrschersinne gemäss, zu bestimmten mechanischen Arbeiten (d. h. zu Verrichtungen der Wirkungen jener mechanischen Kräfte, welche seinem Zwecke zuwider sind) zu verwenden, konnte bisher noch keine allgemeine Methode ersonnen wer-

den, die Kraft jederzeit so anzubringen, dass Kraft und Widerstand einander beständig fort das statische Gleichgewicht hielten. Man hat daher bei jenen Maschinen, wo dieser Endzweck, folglich jener der gleichförmigen Bewegung für einen bestimmten Punkt der Maschine nicht vollkommen erreicht werden konnte, Mittel ersonnen, um sich dieser Gleichförmigkeit der Bewegung wenigstens zu nähern. Hierüber ist das Wichtigste in den Paragraphen 35 und 41 vorgetragen worden.

Hier entsteht nun die wichtige Frage: Erleidet man in solchen Fällen, wo man den Gang der Maschine, durch erwähnte Mittel, der gleichförmigen Bewegung nähert, bei gegebenem Kraftaufwande (nach der obigen Methode gemessen) einen Gewinnst, Verlust, oder keines von beiden für die verrichtete Arbeit, wenn man diesen Fall mit jenem vergleicht, wo die Kräfte und Widerstände unter einander beständig im statischen Gleichgewichte stehen?

§. 45.

Ehe ich diese Frage auf eine allgemeine Art beantworte, will ich durch zwei Beispiele den Leser hiezu vorbereiten:

Erstes Beispiel. Man denke sich (wie diess z. B. an einem runden, mit einer Kurbel versehenen Schleifstein der Fall wäre) nach der Tangente einer Kurbel die beständige Kraft k so wirkend, dass dieser Druck immer nur über die Hälfte des Kreisbogens vom Halbmesser r [r der Halbmesser der Kurbel] wirksam, hingegen über die andere Hälfte unwirksam wäre. Nach der Tangente jenes Kreises vom Halbmesser a , welchen Kreis man sich in einer auf der Kurbelaxe senkrechten Ebene so vorstellt, dass dessen Mittelpunkt in besagte Axe falle, wirke beständig fort der unveränderliche Widerstand l , welcher sich der Drehung entgegen setzt, welche die Kurbel durch die Kraft k erleidet. Zur Beförderung der Gleichförmigkeit der Bewegung, sei ein Schwungrad an der Kurbel angebracht, und es sei $e^2 m$ die Summe

der Trägheitsmomente um selbige Axe. Welche Bedingnisse sind erforderlich, damit nach jeder Rotation der Kurbel um 360° ein mechanischer *Cyclus* vollendet sei?

Nennen wir c die Anfangs - und Endes-Winkelgeschwindigkeit [nemlich für jenen Augenblick, wo k zu drücken anfängt] für einen *Cyclus*, ferner S , s , die vom Endpunkte des Halbmessers r um die Kurbelaxe beschriebenen Bögen, und die diesen entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten W und w , wobei man S vom ersten Augenblicke der Beschleunigungsperiode, hingegen s vom ersten Augenblicke der Verzögerungsperiode anmisst, so geräth man, nach den allgemein bekannten Formeln der Winkelgeschwindigkeit auf die Gleichungen:

$$W = \sqrt{c^2 + 4g \left(\frac{r k - a l}{c^2 m} \right)} S, \text{ also}$$

hieraus die Winkelgeschwindigkeit am Ende der Beschleunigungsperiode, oder zu Anfang der Verzögerungsperiode =

$$= \sqrt{c^2 + 4g \left(\frac{rk - al}{c^2 m} \right)}; \text{ ferner ist die}$$

Winkelgeschwindigkeit am Ende der Verzögerungsperiode, daher am Ende des *Cyclus* =

$$= \sqrt{c^2 + \frac{4g\pi}{c^2 m} (rk - 2al)} = c. \text{ Hieraus}$$

folgt $rk - 2al = 0$, und $l = \frac{rk}{2a}$.

Nach jedem *Cyclus* ist der Kraftaufwand $= r\pi \cdot k$, und die Arbeit $= r\pi \cdot k$. Man erleidet also hier weder Gewinnst, noch Verlust an Arbeit gegen jenen Fall, wo durch statisches Gleichgewicht vollkommen gleichförmige Bewegung bestanden hätte, wenn man alles zu Ende eines *Cyclus* betrachtet.

Zweites Beispiel. Auch hier soll dasselbe Resultat gezeigt werden. Man denke sich einen Schwanzhammer; (s. Fig. 2.) $ER = a$, $EA' = EA = b$, in Zeit t beschriebener Winkel $= \varphi$, zu Ende t und φ Winkelgeschwindigkeit ω ; während dt zwischen Daumen und Helm wirksame Kraft K in A nach entgegen gesetzten Richtungen

gleich stark drückend also $\frac{d \omega}{2 g d t} =$
 $= \frac{P a - k l}{M m^2}$, wenn $M m^2$ die Summe aller
 Trägheitsmomente der um Axe E zu drehen-
 den Masse, oder $\frac{\omega \cdot d \omega}{2 g \cdot d \varphi} = \frac{P a - k b}{M m^2}$
 oder $-\frac{\omega d \omega}{2 g d \varphi} = \frac{k b - P a}{M m^2}$; ist also Dau-
 men mit Winkelgeschwindigkeit c in A an-
 gelangt, so $\frac{(c^2 - \omega^2)}{4 g} M m^2 + P a \cdot \varphi =$
 $= \int b k d \varphi = F(\varphi)$; also wenn zu Ende
 des Stosses beim Auslassen $\varphi = \varphi'$, $\omega = \omega'$,
 so ist dann $\frac{(c^2 - \omega^2)}{4 g} M m^2 + P a \cdot \varphi' =$
 $= F(\varphi)$. Wird vom Auslassen an mit Win-
 kelgeschwindigkeit ω' vom leer laufenden
 Rade in Zeit τ Winkel ψ beschrieben; zu
 Ende dessen Winkelgeschwindigkeit $= u$ sei,
 so $\frac{d u}{2 g d t} = \frac{P \cdot a}{M m^2}$ oder ($d \psi = u d \tau$)
 $\frac{\omega d u}{2 g d \psi} = \frac{P a}{M m^2}$, also $\frac{u^2 - \omega'^2}{4 g} =$
 $= \frac{P a}{M m^2} \psi$. Ist Beharrungsstand, d. h. langt

jeder Daumen zum Stoss mit der Winkelgeschwindigkeit c an, und ist ψ' zu durchlaufender Winkel vom Auslassen bis zum nächstfolgenden Stosse, so $\frac{c^2 - \omega'^2}{4g} =$

$$= \frac{Pa}{Mm^2} \psi', \text{ also } Pa(\varphi' + \psi') = F(\varphi').$$

Q = Gewicht vom Hammerkopf sammt dessen auf den Schwerpunkt statisch reducirtem Gewichte des Helms, in Bezug auf die Axe B , $BA' = BA = f$; Entfernung des Hammerkopfs von $B = q$ in Zeit t Winkel ω , zu Ende Zeit t und ω Winkelgeschwindigkeit U , so $\frac{kf - Qq}{Nn^2} =$

$$= \frac{U dU}{2g d\omega}, \text{ wenn } Nn^2 \text{ die Summe der Trägheitsmomente um } B, \text{ also } \int k f d\omega =$$

$$= \frac{Nn^2 \cdot U^2}{4g} + Qq \cdot \omega, \text{ da } \omega \text{ und } \varphi \text{ immer}$$

kleine Werthe, so $f d\omega = b d\varphi$, also

$$\int k f d\omega = \int k b d\varphi, \text{ also } \int \overbrace{k f d\omega}^{\omega - \omega'} = \int \overbrace{k b d\varphi}^{\varphi - \varphi'}$$

$[\omega'$ und φ' jenes ω und φ , wobei der Daumen auslässt], also $Pa(\varphi' + \psi') = [U'$ jenes U ,

$$\text{wo der Daumen auslässt}] = \frac{Nn^2 U'^2}{4g} +$$

$$+ Q q \omega', \text{ oder } P R L = \frac{N n^2 U'^2}{4 g} Q. q. \omega'.$$

Nur approximative wahr, wenn φ' , ω' sehr kleine Winkel, und wenn Beharrungsstand.

Darf man nebst dem noch annehmen $N n^2 =$

$= Q q^2$ [wie meistens der Fall] so $P. R L =$

$$= Q \left(\frac{(q U')^2}{4 g} + q \omega' \right) = Q H, \text{ wenn } H$$

die ganze Hammerhöhe die der Hammerkopf bis zur Geschwindigkeit $= 0$ fliegt (ohne Prellbalken, blos als schwerer Körper), und wenn man den Bogen, den er bei jedem Wurf macht, als senkrecht grade Linie betrachten darf.

§. 46.

Wir wollen nunmehr die (§. 44) gestellte Frage auf eine allgemeine Art beantworten. Wir denken uns zu diesem Ende irgend eine Maschine, bei welcher für die Geschwindigkeit ω eines betrachteten Punkts derselben, die zugleich statt habenden Geschwindigkeiten aller übrigen Massen $m, m', m'', \dots$, wel-

che zum Systeme der Maschine gehören, durch $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$, . . . ausgedrückt werden können. Nehmen ferner die Kräfte $\wp$, $\wp'$, $\wp''$, ... und die Widerstände $\wp$, $\wp'$, $\wp''$, ... an selbiger angebracht an, jedoch so, dass dieselben unter einander nicht im statischen Gleichgewichte stehen, so dass also nur eine näherungsweise Gleichförmigkeit bei dem Gange der Maschine möglich wird. Wir betrachten hier nur einen mechanischen *Cyclus*, da für jeden folgenden Gang dasselbe zu sagen wäre, als von den andern.

Jeder *Cyclus* muss bei einem solchen Gange der Maschine nothwendig aus mehr als einer Periode bestehen, wenn wir unter einer Periode jenen Zeitraum verstehen, binnen welchen der betrachtete Punkt bloß beschleunigt oder bloß verzögert wird, denn wie könnte sonst dessen Geschwindigkeit am Ende des *Cyclus* dieselbe als zu Anfange desselben seyn? Nennen wir daher (rücksichtlich des betrachteten Punktes) c die Geschwindigkeit zu Anfange des *Cyclus*, λ' jene am Ende der

ersten Periode, λ'' jene am Ende der zweiten Periode, λ''' jene am Ende der dritten Periode, u. s. w. so bestehen folgende Gleichungen:

Für das Ende der ersten Periode:

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots - \int \mathfrak{p} d\mathfrak{f} - \int \mathfrak{p}' d\mathfrak{f}' - \dots = \frac{1}{4g} \left(m A^2 + m' B^2 + m'' C^2 + \dots \right) (\lambda'^2 - c^2),$$

für das Ende der zweiten Periode,

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots - \int \mathfrak{p} d\mathfrak{f} - \int \mathfrak{p}' d\mathfrak{f}' - \dots = \frac{1}{4g} \left(m A^2 + m' B^2 + m'' C^2 + \dots \right) (\lambda''^2 - \lambda'^2),$$

für das Ende der dritten Periode,

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots - \int \mathfrak{p} d\mathfrak{f} - \int \mathfrak{p}' d\mathfrak{f}' - \dots = \frac{1}{4g} \left(m A^2 + m' B^2 + m'' C^2 + \dots \right) (\lambda'''^2 - \lambda''^2),$$

für das Ende der vierten Periode,

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots - \int \mathfrak{p} d\mathfrak{f} - \int \mathfrak{p}' d\mathfrak{f}' - \dots = \frac{1}{4g} \left(m A^2 + m' B^2 + m'' C^2 + \dots \right) (\lambda''''^2 - \lambda'''^2),$$

u. s. w.

Besteht der *Cyclus* aus zwei Perioden, so ist $\lambda'' = c$; besteht er aus drei Perioden, so ist $\lambda''' = c$; besteht er aus vier Perioden, so ist $\lambda'''' = c$, u. s. w.

Man sieht hieraus den allgemeinen Satz ein, dass bei der hier betrachteten Maschine, es mag der mechanische *Cyclus* aus wie viel immer Perioden bestehen, die nach jedem *Cyclus* verrichtete Arbeit

$$\begin{aligned} & \int p \, d\zeta + \int p' \, d\zeta' + \dots \\ & + \int p \, d\zeta + \int p' \, d\zeta' + \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

genau dem binnen einem *Cyclus* verwendeten Kraftaufwande

$$\begin{aligned} & \int P \, d\mathcal{E} + \int P' \, d\mathcal{E}' + \dots \\ & + \int P \, d\mathcal{E} + \int P' \, d\mathcal{E}' + \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

gleichkömmt; dass es also, rücksichtlich der totalen verrichteten Arbeit, mittelst eines bestimmten Kraftaufwandes vollkommen gleichgiltig sei, ob man die zu Gebothe stehenden Kräfte an einer solchen der gleichförmigen Bewegung sich blos nähernden, oder ob man sie an einer solchen Maschine anbringt, wobei vollkommene Gleichförmigkeit im Gange der Maschine herrscht. Hieraus folgt aber auch zugleich die wichtige Lehre für das

Maschinenwesen, dass es zur Verrichtung der grösstmöglichen totalen Arbeit durch bestimmte Kräfte blos darauf ankomme, sei die Maschine und deren Gang wie immer beschaffen, die Kräfte so zu verwenden, dass der Kraftaufwand (nach der bisherigen Methode gemessen) grösstmöglichst werde.

Am Ende jedes *Cyclus* hat also einerlei Kraftaufwand einerlei Arbeitsresultat zur Folge, seien die übrigen Umstände, unter denen die Kräfte wirken, wie immer beschaffen. Ein erhabenes Naturgesetz im Reiche der Dynamik. Möchte dasselbe Gesetz nicht auch in der moralischen Welt statt finden? sollte der nach edlen Zwecken rastlos strebende Geist an einer seinem Bemühen proportionalen Belohnung zweifeln dürfen? Vorübergehende Unfälle sind kein Einwurf dagegen; denn wer ist im Stande, den *Cyclus* seines moralischen Wirkens zu bestimmen?

§. 47.

So wie es für das Fortschleppen einer

Last gleichgiltig ist, sei das Zugthier daran mittelst eines Seils oder mittelst einer goldenen Kette gespannt, eben so ist es für das totale Arbeitsvermögen einer Kraft ganz dasselbe, ob man sie an dieser oder jener Maschine anbringe. Jede Kraft trägt schon das Gepräge ihrer möglichen Wirksamkeit mit sich. Maschinen dienen also lediglich dazu, Kräfte unter einander in (irgend einem Zwecke angemessene) wechselseitige Wirksamkeit zu setzen. Berücksichtigt man bloß die durch eine Maschine beabsichtigte Arbeit, den sogenannten ökonomischen Effekt, so wird selbiger durch die Maschine nicht nur nicht erhöht, sondern sie ist vielmehr allemal ein Hinderniss für die volle Verwendung der Kraft auf die beabsichtigte Arbeit, und der Erfinder, Berechner und Erbauer der Maschine hat dann schon seine Meisterprobe abgelegt, wenn er den ökonomischen Effekt jenem totalen Effekte möglichst nahe gebracht hat, den die Kraft ohne Maschine auszuüben im Stande ist. Möchte doch dieser Grund-

satz so manchen hochherzigen Beförderer der Nationalindustrie leiten, dessen edles Streben durch Scharlatane und Projektenmacher so oft entheiligt wird. Riesenmässige Wirkungen sollen oft neu erfundene Maschinen mittelst eines geringen Kraftaufwandes zum Resultate haben, wie diese elenden Pfuscher vorgeben. Armseliger Mensch, du dünkst dich Schöpfer neuer Naturgesetze, und vermagst nicht einmal, das nach diesen Gesetzen Geschaffene zu durchschauen!

Eine andere Frage, als jene, welche im (§. 46) erörtert wurde, ist diese: wie soll man es anfangen, um mit gegebenen Kräften die grösst möglichste beabsichtigte Arbeit zu verrichten?

Die Antwort hierauf, welche für den Praktiker vom höchsten Interesse ist, reduziert sich im Allgemeinen auf folgendes:

Erstens. Die Maschinen sind ein nothwendiges Uebel; verwende sie also nur da, wo du deine Absicht auf keine andere Art erreichen kannst.

Zweitens. Die Maschine sei so einfach als es nur immer der Endzweck zulässt. Erhebe deinen Blick zu der Mechanik des Himmels, und erkenne die majestätische Einfachheit der Mittel, wodurch Welten um Welten getrieben werden. Unnützerweise komplizirte Maschinen erregen bloß die Bewunderung des Ungebildeten.

Drittens. Den Nebenhindernissen der Maschinen (als Reibung, Straffheit der Seile, Adhäsion des Wassers an den Wänden, Kontraktion desselben beim Uebergange aus weiten in engere Gefäße u. s. w.) kannst du nicht ganz ausweichen, du mußt unnütze Lasten mit fortschleppen. Nur dem Weltenbeherrscher ward es gestattet, seine mächtige Maschine ohne Nebenwiderstände zu treiben, nur ihm standen Kräfte zu Gebote, welche, nach dem unendlichen Raume hingreifend, Massen gegen Massen in dynamische Relation zu setzen vermochten, ohne hiezu materieller Verbindungsstücke zu bedürfen. Dem beschränkten Menschen ist, als

höchstes Meisterwerk, nicht mehr gestattet, als die unnütze Arbeit möglichst vermindert zu haben. [Hieher gehört z. B. eine geschickte Auswahl und das Schmieren der sich reibenden Flächen, feste leicht biegsame Seile, und deren Verwendung an grossen Rollen, Ventile mit grossen Oefnungen, die aber doch gut schliessen u. s. w.]

Viertens. Drücke die Grösse der verrichteten beabsichtigten Arbeit durch allgemein angenommene Bezeichnungen jener Grössen aus, welche darauf Einfluss haben, d. h. wovon der ökonomische Effekt (für eine angenommene Dauer der Arbeit) eine Funktion ist; und bestimme nun, nach bekannten Methoden, jene Werthe der Argumente dieser Funktion, wodurch diese zu einem Maximum wird.

§. 48.

In den vorhergehenden Paragraphen, wurde des für den Praktiker sehr wichtigen Umstandes nicht erwähnt, der bei Maschinen sehr

oft eintritt, dass nemlich manche, der aus träger Masse bestehenden Theile der Maschine, aus der Ruhe binnen einer Periode des *Cyclus* nach gewissen Richtungen beschleunigt, und binnen der folgenden Periode des *Cyclus*, nach entgegen gesetzten Richtungen aus der Ruhe abermals beschleunigt werden müssen. Diese Rücksicht bezieht sich z. B. auf die Zugstangen und Kolben bei hohen und niedrigen Sätzen, auf die Schacht- und Feldgestänge und überhaupt auf jegliches Kunstgestänge, auf Kolben, Kolbenstange und Balanzier bei Dampfmaschinen, u. s. w., und überhaupt auf jene Fälle, wo alle einzelnen Massentheile der Verbandstücke zwischen Kraft und Widerstand nicht beständig fort nach einerlei Richtungen bewegt werden.

Schon nach Analogie lässt sich, durch Erwägung jener Fälle, wo zwar die Massen beständig nach einerlei Richtungen laufen, wo aber der Ueberschuss der Bewegungsquantität über die Normal-Quantität an Bewegung bis zu dessen Tilgung als Kraft benützt wird,

schliessen, dass auch dann am Ende des mechanischen *Cyclus*, die binnen demselben verrichtete totale Arbeit dem Kraftaufwande, (welcher der Dauer des *Cyclus* entspricht) gleich komme, wenn die binnen dem *Cyclus* hin und wieder aus dem Stande der Ruhe beschleunigten materiellen Theile der Maschine, der Kraft durch ihre Bewegungsquantitäten, bis zu deren jedesmaligen Tilgung, mit arbeiten helfen. Sehr deutlich zeigt sich diess aus dem Beispiele vom Schwanzhammer (§. 45), wo zwar die Trägheit des Hammerkopfs sich dessen Beschleunigung während dem Stosse des Daumens entgegen setzt, dann aber wieder beiträgt, gegen die Schwere des Hammerkopfs einer grössern Flughöhe bis zur Tilgung der Geschwindigkeit hinauf zu bedürfen. Ein anderes wäre, wenn die beschleunigte Masse durch einen ausserhalb der Maschine gelegenen Widerstand zum Stillstande gebracht würde, wie diess z. B. beim Schwanzhammer der Fall wäre, wenn seine Flughöhe durch einen Prellbalken vermindert würde,

wo dann (*ceteris paribus*) $O H$ kleiner ausfiele (*). Man sieht also, dass man bei den aus der Ruhe binnen jedem *Cyclus* hin und wieder beschleunigten materiellen Theilen der Maschine, deren Bewegungsquantitäten bis zu ihrer vollkommenen Tilgung mit als Kraft benützen müsse, wenn man an der totalen Arbeit (wozu man z. B. beim Schwanzhammer mit dem schlecht elastischen Prellbalken das unnütze Eindringen des Hammerkopfes in den Prellbalken doch nicht wird rechnen wollen) gegen jenen Fall nichts verlieren will, wo alle materiellen Theile der Maschine beständig nach denselben Richtungen laufen.

(*) Anmerkung. Wäre indessen der Prellbalken vollkommen elastisch, so wäre, rücksichtlich der Arbeit, das Eisen zu schmieden, durch den Prellbalken nichts verlohren; da diess aber nie der Fall ist, auch das heftige Prellen des Kopfes an den Prellbalken den Ruin des Hammergerüstes zur Folge haben muss, so ist es vernünftiger, die Kürze des Schlages durch andere Mittel zu bewirken, z. B. dadurch, dass des Hammers Schwerpunkt im Helme, und zwar nahe an die Axe des Hammerhelms zu liegen käme, welches man in England wirklich thut.

Die hier blos durch Gründe der Wahrscheinlichkeit unterstützten Behauptungen, folgen sehr leicht aus dem dynamischen Lehrsatz der virtuellen Geschwindigkeiten.

Bezeichnen wir die binnen jedem *Cyclus* aus der Ruhe hin und wieder beschleunigten Massen durch $M, M', \dots$, die übrigen beständig nach einerlei Richtungen laufenden Massen hingegen durch $m, m', m'', \dots$, ferner der letztern Geschwindigkeiten, zu Anfange und zu Ende des *Cyclus*, durch $c, c', c'', \dots$, die an der Maschine angebrachte Druckkräfte durch $\wp, \wp', \dots$, und Druckwiderstände durch $\wp, \wp', \wp'', \dots$, denken wir uns ferner den *Cyclus* in zwei Perioden getheilt, so dass binnen der ersten Periode die Massen $M, M', \dots$ von der Bewegung $= 0$ ausgehend, wieder zur Bewegung $= 0$ gelangen, dass aber am Ende der ersten Periode die Massen $m, m', m'', \dots$ die Geschwindigkeit $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ haben, und dass binnen der zweiten Periode die Massen $M,$

$M', \dots$, von der Bewegung $= 0$ ausgehend, wieder zur Bewegung $= 0$ gelangen, dass aber am Ende der zweiten Periode die Massen $m, m', m'', \dots$, die Geschwindigkeiten $c, c', c'', \dots$ haben: so ist für das Ende der ersten Periode $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots - \int \mathfrak{p} d\mathfrak{f} - \int \mathfrak{p}' d\mathfrak{f}' - \dots =$

$$= \frac{m(\lambda^2 - c^2) + m'(\lambda'^2 - c'^2) + m''(\lambda''^2 - c''^2)}{4g}$$

unter der Voraussetzung richtig, dass binnen dieser Periode beständig die Geschwindigkeiten der Massen $m, m', m'', \dots$, und $M, M', M'', \dots$, allein durch die Drucke $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \dots \mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}'', \dots$ bestimmt wurden: sie wäre aber nicht mehr wahr, wenn andere Drucke (die nicht in dieser Gleichung enthalten wären), folglich ausserhalb der Maschine wirkende Drucke, auf einige dieser Geschwindigkeiten, z. B. auf die Tilgung der Geschwindigkeiten von $M, M', \dots$ Einfluss gehabt hätten. Unter denselben Beschränkungen ist am Ende der zweiten Periode, folglich des ganzen *Cyclus*, die Gleichung

$$\begin{aligned} \text{chung wahr: } & \int \mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots - \\ & - \int \mathfrak{p} d\mathfrak{f} - \int \mathfrak{p}' d\mathfrak{f}' - \dots = \\ & = \frac{m(c^2 - \lambda^2) + m'(c'^2 - \lambda'^2) + m''(c''^2 - \lambda''^2)}{4g}. \end{aligned}$$

Addirt man aber diese beiden Gleichungen zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} & \int \mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots + \int \mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots \\ & - \int \mathfrak{p} d\mathfrak{f} - \int \mathfrak{p}' d\mathfrak{f}' - \int \mathfrak{p}'' d\mathfrak{f}'' - \dots - \int \mathfrak{p} d\mathfrak{f} - \\ & - \int \mathfrak{p}' d\mathfrak{f}' - \int \mathfrak{p}'' d\mathfrak{f}'' - \dots = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichung sich auf einen ganzen *Cyclus*, von dessen Beginnen an bis zu dessen Ende, bezieht.

§. 49.

Die Maschinen, wie sie in vorhergehenden Paragraphen betrachtet wurden, hatten bloß zum Endzwecke, Drucke gegen ihre Richtungen zu bewegen, wie diess z. B. bei Schneidemühlen, Bohr- und Schleif-Werken der Fall ist. In manchen Fällen beabsichtigt man aber bei Maschinen nebstbei noch, Massen aus der Ruhe oder aus bestimmten Geschwindigkeiten über bestimmte Räume zu

beschleunigen, welche z. B. bei Wurfrädern, Schöpfrädern, Moderwerken, Austiefungsmaschinen, Kastenkünsten, Büschelkünsten, der Verra'schen Seilenmaschine, . . . und überhaupt aller Wasserhebungsmaschinen, als Saugwerken, Druckwerken, Spiralpumpe, Wasserschnecken u. s. w. der Fall ist. Ueber diese wollen wir nun ähnliche Betrachtungen anstellen, als in vorhergehenden Paragraphen, welche jedoch nur in so ferne ihre Anwendung finden, als nicht besondere hydraulische Rücksichten eintreten, welche hier zu berühren nicht der Ort ist. Wird also hier z. B. von einer Wasserhebungsmaschine gesprochen, so gilt das Gesagte nur unter dem Gesichtspunkte, als dabei das Wasser als träge Masse der Veränderung seiner bestehenden Geschwindigkeit, und als schwerer Körper, der Entfernung vom Erdmittelpunkte widersteht. Ganz unabhängig von dergleichen Rücksichten lässt sich z. B. das Schöpfrad betrachten.

Es wird in dem Folgenden, wie im Vor-

hergehenden, blos von den fortschreitenden Bewegungen der einzelnen Massentheile gesprochen, daher alle diese Massentheile unendlich klein genommen werden müssen, damit deren rotatorische Bewegungen verschwinden.

Die Kraftdrucke werden hier wieder durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \dots$, die Widerstandsdrucke durch $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}'', \dots$, die von deren Angriffspunkten binnen der Zeit t nach und gegen den Drucken beschriebenen Räume durch $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \dots$ und $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \dots$ angedeutet; ferner die unveränderlichen Massentheilchen der Maschine durch $m, m', m'', \dots$, so wie deren Endesgeschwindigkeit am Ende der Zeit t , durch $v, v', v'', \dots$, ferner die veränderlichen der Zeit t entsprechenden Massen, und deren entsprechende Geschwindigkeit durch $\mu, \mu', \mu'', \dots$ und $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$, endlich die Inkremente dieser Massen (die binnen dt zugewachsen) $d\mu, d\mu', d\mu'', \dots$, welche in das System mit den Geschwindigkeiten $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ treten, daher

binnen dt die Geschwindigkeit $\varphi = \alpha$, $\varphi' = \alpha'$, $\varphi'' = \alpha''$, ... erlangen müssen.

Diesem gemäss besteht die Gleichung

$$\begin{aligned} p d\mathcal{S} + p' d\mathcal{S}' + \dots - p d\mathfrak{s} - p' d\mathfrak{s}' - p'' d\mathfrak{s}'' - \dots \\ \dots = \frac{1}{2g} \left(m v dv + m' v' dv' + \dots \right. \\ \dots + \mu \varphi d\varphi + \mu' \varphi' d\varphi' + \dots \\ \dots + \varphi^2 d\mu + \varphi'^2 d\mu' + \dots - \\ \left. - \alpha \varphi d\mu - \alpha' \varphi' d\mu' - \dots \right). \end{aligned}$$

Nennen wir (§. 35.) ω die Geschwindigkeit des Punktes N , dessen Gleichförmigkeit in der Bewegung beabsichtigt wird, und bezeichnen $v, v', v'', \dots$; ferner $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$ (als Funktion von ω) durch $F(\omega), F^+(\omega), F^{++}(\omega), \dots$, ferner durch $\psi(\omega), \psi^+(\omega), \psi^{++}(\omega), \dots$, so erhalten wir durch Substitution, die Gleichung:

2) $p d\mathcal{S} + p' d\mathcal{S}' + \dots - p d\mathfrak{s} - p' d\mathfrak{s}' - p'' d\mathfrak{s}'' - \dots$

$$\begin{aligned} \dots = \frac{1}{2g} \left(m. F(\omega) F'(\omega) d\omega + \right. \\ \left. + m' F^+(\omega) F^{+'}(\omega) d\omega + m'' F^{++}(\omega) F^{++'}(\omega) d\omega + \right. \\ \left. + \dots + \mu \psi(\omega) \psi'(\omega) d\omega + \mu' \psi^+(\omega) \psi^{+'}(\omega) d\omega + \right. \\ \left. + \mu'' \psi^{++}(\omega) \psi^{++'}(\omega) d\omega + \dots + \varphi^2 d\mu + \right. \\ \left. + \varphi'^2 d\mu' + \dots - \alpha \varphi d\mu - \alpha' \varphi' d\mu' - \dots \right). \end{aligned}$$

Ist die Bewegung des Punktes N ganz gleichförmig, so erhält man aus letzter Gleichung jene $\mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots - \mathfrak{p} d\mathfrak{f} - \dots$

$$\dots = \frac{1}{2g} \left(\varphi d\mu (\varphi - \alpha) + \varphi' d\mu'' (\varphi' - \alpha') + \right. \\ \left. + \varphi'' d\mu''' (\varphi'' - \alpha'') + \dots \right).$$

Diese Gleichung drückt analytisch die Bedingungen aus, unter welchen im vorliegenden Falle der Punkt N eine vollkommen gleichförmige Bewegung besitzen wird. Aus ihr folgt z. B. der sehr richtige Schluss, dass dieses, bei Unveränderlichkeit der Massen $\mu, \mu', \mu'', \dots$, oder wenn die Inkremente dieser Massen in das System mit den Geschwindigkeiten $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$ der Massen $\mu, \mu', \mu'', \dots$ treten, dann erfolgen werde, wenn $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \int \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \dots = \int \mathfrak{p} d\mathfrak{f} + \int \mathfrak{p}' d\mathfrak{f}' + \dots$ ist.

Wir wollen die, beim vollkommen gleichförmigen Gange des Punktes N , dem Kraftaufwande $\mathfrak{P} d\mathfrak{S} + \mathfrak{P}' d\mathfrak{S}' + \mathfrak{P}'' d\mathfrak{S}'' + \dots$

entsprechende verrichtete Arbeit $p d\zeta + p' d\zeta' + p'' d\zeta'' + \dots + \dots +$
 $+ \frac{1}{2g} \left(\varphi (\varphi - \alpha) d\mu + \varphi' (\varphi' - \alpha') d\mu' + \dots \right)$ die Normalarbeit nen-
 nen, und sie durch U bezeichnen.

Es folgt aus Gleichung $\mathcal{A}$:

$$\frac{dw}{2g} = \frac{p d\zeta + p' d\zeta' + p'' d\zeta'' + \dots - U}{mF(w)F'(w) + m'I^{++}(w)F'(w) + \dots + \mu\psi(w)\psi'(w) + \mu'\psi^+(w)\psi'^+(w) + \dots}$$

Die Bewegung des Punktes N nähert sich daher der gleichförmigen um so mehr, je mehr die Normalarbeit dem ihr entsprechenden Kraftaufwande gleichgesetzt werden darf, und je grösser der Nenner obigen Ausdrucks ist.

Bewegen sich der Punkt N und die Massen $m, m', m'', \dots$ beständig nach einerlei Richtungen, und sind die Massen $m, m', m'', \dots$ so angebracht, dass $F(\omega) = A\omega$, $F^+(\omega) = B\omega$, $F^{++}(\omega) = C\omega, \dots$ sind, worin $A, B, C, \dots$ constant angenommen werden: so erhält man für eben erwähnten Nenner den Ausdruck

$$(mA^2 + m'B^2 + m''C^2 + \dots)\omega + \mu\psi(\omega)\psi'(\omega) + \mu'\psi^+(\omega)\psi^{+'}(\omega) + \dots$$

Man kann daher auch hier als Regel annehmen, dass die Gleichförmigkeit der Bewegung für den Punkt N wesentlich gewinne, wenn man alles so anordnet, dass die Summe der Trägheitsmomente der beständigen Massentheilchen der Maschine gross ausfalle. In wie ferne die Summe der Produkte aus den veränderlichen, zur Nutzlast gehörigen, Massen $\mu, \mu', \mu'', \dots$ in ihre Geschwindigkeiten, und in die erste abgeleitete Funktion derselben zur gleichförmigen Bewegung des Punktes N positiv oder negativ beitragen,

lässt sich für jeden einzelnen Fall aus obiger Formel ersehen.

Die eben angeführte Regel, rücksichtlich des Ausdrucks $m A^2 + m' B^2 + m'' C^2 + \dots$ stimmt mit jener, welche Herr Langsdorf in seiner so gemeinnützigen Maschinenlehre Seite 260. I. Band im Artikel Saugwerke giebt, überein.

§. 50.

Die im vorigen Paragraphe angestellten Betrachtungen, deren Resultate in allen jenen Fällen mit Nutzen angewendet werden können, wo ein wesentlicher Theil der zu verrichtenden Arbeit darin besteht, blos die Trägheit der Nutzlast zu wältigen, geben mir Gelegenheit eine neue Art von Gradirung vorzuschlagen, deren ich hier nur ganz kurz erwähnen will, ohne mich in irgend eine Berechnung einzulassen.

Man gedenke sich ein weites Gefäss, welches bestimmt ist, die zu gradirende Sole in sich zu fassen. Im Mittelpunkte des Quer-

schnitts dieses Gefäßes befinde sich ein, so sehr es die erforderliche Festigkeit zulässt, so konstruirter Cylinder, dass dessen Gewicht so geringe wie möglich sei. Dieser Cylinder stehe mit seiner Axe gegen den Spiegel der Sole dergestalt geneigt, dass der tiefste Theil der gekrümmten Oberfläche des Cylinders nach der ganzen Höhe der Cylinderaxe unter Wasser stehe, so dass, wenn dieser Cylinder um seine geneigte Axe einmal herum gedreht worden, an der gekrümmten Oberfläche des Cylinders kein Punkt besteht, der nicht mit der Sole in Berührung gekommen wäre. Denkt man sich nun die physische Axe des Cylinders in einem Maschinengerüste dergestalt verbunden, dass dem Cylinder keine andere Bewegung als die rotatorische um seine unbewegliche mathematische Axe gestattet ist; denkt man sich ferner die physische Cylinderaxe mittelst eines Räderwerkes mit dem Angriffspunkte einer Kraft in solcher Verbindung, dass durch die Bewegung dieses Angriffspunktes dem Cylinder die erwähnte

Umdrehungsbewegung mitgetheilt werde, so sieht man ein, dass bei angenommenen Dimensionen dieser Vorrichtung, einem mechanischen Momente der treibenden Kraft, eine bestimmte Grösse der Abdampfung entsprechen müsse, versteht sich unter übrigens gegebenen Umständen, als Temperatur der Sole und Luft, Art des Luftzugs, hygrometrischer Zustand der Luft u. s. w.

Bei dieser Gradirung ist, wie bei der Dorengradirung der unmittelbare Endzweck des mechanischen Moments der Kraft in einer bestimmten Zeit die grösst mögliche Summe von Oberflächen der zertheilten Sole in unmittelbare Berührung mit der atmosphärischen Luft zu bringen. Dieser Endzweck wird hier dadurch erreicht, dass Theils die an der gekrümmten Cylinderoberfläche adhäreirenden Wassertheile in Kreisen durch die Luft bewegt werden, theils dadurch, dass durch die Centrifugalkraft mehrere Wassertheilchen von der gekrümmten Oberfläche weggerissen, und in ihren parabolischen Bahnen dem Spiegel

der Sole wieder zugeführt werden, während welchen Bahnen ein Theil ihrer Masse in der Luft entweichen muss.

Wenn diese vorgeschlagene Gradirmethode irgend einen Werth besitzt, so glaube ich ihn wesentlich darin suchen zu müssen, dass hiebei vorzüglich nur die Trägheit des Wassers zu überwältigen ist, da bei der gewöhnlichen Dorrengradirung (wo die Sole auf eine gewisse Höhe gefördert werden muss, um nach der Gradirung sich in der Horizontalebene der Salzkothen zu befinden) sowohl das Gewicht der Sole als die Trägheit derselben zu überwinden kömmt. Uebrigens könnte auch als ein Vorzug dieser Vorrichtung angesehen werden, dass hiebei von jenen bedeutenden Nebenhindernissen nichts vorkömmmt, welche bei unsern bisherigen Wasserhebungsmaschinen wohl nie werden beseitigt werden können, als *Contraction*, *Adhesion* u. s. w.

Einen wichtigen Einfluss auf die Gradirung, nach der hier erwähnten Methode

möchte allerdings die Qualität des Körpers haben, woraus die gekrümmte Oberfläche des Cylinders bestünde, da Erfahrungen beweisen, dass wenn die Oberflächen verschiedenerlei Körper mit einerlei Flüssigkeit auf gleiche Weise benetzt werden, und wenn übrigens alle Umstände gleich sind, die Verdunstung an dem einen Körper schneller, an dem andern Körper langsamer vor sich gehe. Einigen Aufschluss über diesen Gegenstand möchte die in Schweigers Journal 1813. Heft 4 enthaltene Darstellung eines neuen Wärmegesetzes, die Temperatur der Körper an deren Oberfläche betreffend, von Ruhland, liefern, worin er sich unter andern folgendermassen ausdrückt: „Ich liess am Diameter und Höhe genau gleich grosse Kapseln von dünnem Papendeckel von 2 — 4" Diameter und 5 — 6" Höhe verfertigen; ich füllte diese mit denen verschiedenen Substanzen, und, nachdem ich sie so gestellt hatte, dass sie mit dem hintern Rande höher stehend, unter einem Winkel von 30 — 40° die Strahlen der

auf sie einfallenden Wärme erhielten, so bestreute ich mehrere Stellen derselben mit sehr fein gepulvertem Kampfer, und setzte nun die Kapseln, deren immer nur 2 mit einander verglichen wurden, der strahlenden Wärme einer ganz gleichförmigen Wand eines Ofens aus. Man bestimmte nun die Menge der aufgenommenen Wärme durch die Zeit, welche der Kampfer zu seiner Verdunstung auf den verschiedenen Körpern bedurfte.“

„Setzt man unter den angegebenen Bedingungen glänzendes Eisenblech und eben so dicken und grossen Pappendeckel der strahlenden Wärme aus, nachdem man beide auf die angezeigte Art mit Kampfer an mehreren Stellen gleichförmig bestreuet hatte, so findet man, dass anf. letzterm schon aller Kampfer verdunstet ist, während man auf dem Bleche kaum eine Abnahme desselben bemerken kann. Eine Scheibe Siegellack oder Schwefel verhalten sich zu dem Pappendeckel eben so, wie das Eisenblech, obwohl sie die Verdunstung nicht so sehr wie dieses

retardiren. Man erhält dieselben Resultate, wenn man statt der hier genannten Scheiben Pulver anwendet, und man erhält dieselben grossen Verdunstungs-Unterschiede des auf ihnen aufgestreuten Kampfers zwischen Kienruss und Röthe, Kienruss und Schwefel, Magnesia und Glaubersalz, wo der erste Körper immer der die Verdunstung beschleunigende ist.“

„Aus diesen und ähnlichen Versuchen zieht Ruhland den Schluss, dass die Körper überhaupt durch eine eigentliche Thätigkeit die Wärme beständig aufnehmen, und dass an der Oberfläche der Körper sich ein sehr merkwürdiger Wärme - Verkehr bildet. Indem nemlich die Körper die Wärme beständig absorbiren, ohne sie darum auch wirklich bezwingen und in sich halten zu können, so nehmen sie, während ihre Temperatur immer dieselbe bleibt, doch um so mehr Wärme auf, je mehr sie in einer gegebenen Zeit davon wieder verlieren, d. h. je bessere Wärmestrahler sie sind; dadurch

bildet sich, und zwar bei jeder Temperatur, beständig eine höhere Temperatur auf ihren Oberflächen, als sich in ihrem Innern bilden kann.“

§. 51.

Die im §. 49. erhaltene Gleichung A will ich hier auf einen der für die Ausübung wichtigsten Fälle, nemlich auf die Theorie des Fuhrwerks anwenden. Da die hier behandelte Theorie sich ganz vorzüglich darin von den bisherigen Theorien des Fuhrwerks unterscheidet, dass dabei die Trägheit der durch die Räder längst der Radfurchen oder Geleisen eingedrückten Masse berücksichtigt wird, so will ich vorläufig erinnern, dass diese Rücksicht nicht eine bloße spekulative Subtilität sey, welches man einsieht, wenn man sich z. B. einen auf einem lockern Sandboden fortgezogenen Wagen denkt, wobei (wegen der Tiefe, und dann oft beträchtlichem spezifischen Gewichte des Sandes der Furchen) allerdings der Pferdekraft ein beträcht-

licher Theil der Arbeit dadurch auferlegt wird, dass sie nebst der Nutzarbeit und noch andern unvermeidlichen Nebenhindernissen, eine grosse Menge Sandes aus der Ruhe in Bewegung zu setzen hat.

Um den Gegenstand zu erleichtern, betrachte ich hier einen zweirädrigen belasteten Wagen; der Allgemeinheit der Aufgabe wegen aber, setze ich, es sei der Wagen über eine schiefe Ebene zu bewegen, deren Neigungswinkel mit dem Horizonte ich $= \beta$ setze.

Der Endzweck des Fuhrwerks (hier wird nicht von Spatzierwägen gesprochen, wobei elegante Formen und sanfte Bewegungen für die darin sitzenden wesentlich sind) ist, beträchtliche Lasten von einem Orte zum Andern zu übertragen. Liegen beide Orte und alle Zwischenpunkte der Bahn von einem Orte zum Andern in einerlei Horizontalebene, so hat eigentlich die Kraft am Fuhrwerke, rücksichtlich des Endzweckes, eine mechanische Arbeit $= 0$ ausgeübt, denn sie hat beim

Ankommen dieselbe Quantität der Bewegung wieder getilgt, welche sie beim Abfahren schaffen musste. Die erwähnte Kraft hat also in einem solchen Falle eine mechanische Arbeit bloß rücksichtlich der Ueberwältigung von Nebenhindernissen ausgeübt. Anders verhält es sich, wenn der Ort des Ankommens höher als jener der Abfahrt liegt, und wenn die Bahn nicht in allen Punkten in der Horizontalebene liegt, u. s. w. Aus dieser Betrachtung (welche, weiter ausgedehnt, in eine langweilige Dissertation ausarten möchte) sieht man, dass es zur Erreichung des unmittelbaren Endzwecks des Fuhrwerks darauf ankomme, die dabei vorkommenden Dimensionen so zu bestimmen, dass das mechanische Moment der gegebenen Kraft möglichst wenig an Nebenwiderständen zu überwältigen habe, dabei selbst aber möglichst gross sey. Man sieht aber zugleich ein, dass wegen Veränderung des Gefälles der Strasse, und der Qualität des Bodens derselben, es nicht möglich sei, besagte Regeln so anzugeben, dass sie für alle

Theile einer zu befahrenden längern Strecke allemal die richtigsten wären. In solchen Fällen ist die Hauptart der Strasse mit einem geometrisch richtigen Ueberblicke im Durchschnitte zu bestimmen, und von den einzelnen Anomalien zu abstrahiren.

Die Gleichförmigkeit der obwaltenden Umstände, ist sicherlich eine der wesentlichsten Vorzüge der Eisenbahnen, bei deren Anlegung (wenigstens für beträchtliche Strecken) allemal ein gleiches Gefälle beobachtet wird, so dass man einen Theil der Fahrt durchaus nach dieser, einen andern durchaus nach jener Methode verrichtet.

Die Bewegung der Wagen wird bisher allgemein durch daran gespannte Thiere verrichtet, unter welchem Gesichtspunkte ich die Theorie des Fuhrwerks hier auch nehmen will, ob sich gleich derselbe Endzweck auch durch andere Mittel erreichen liesse, z. B. durch Dampfmaschinen *).

(*) Anmerkung. Das Treiben der Wagen durch Dampfmaschinen hat das Uebel, dass man die schwere

Wird ein zweirädriger beladener Wagen über eine schiefe Ebene, welche gegen den Horizont um den Winkel β geneigt ist, durch die Kraft $\mathfrak{P}$ der Pferde mit der Geschwindigkeit c bewegt, so verwandelt sich die Gleichung A , wegen der Gleichförmigkeit der Bewegung, und darum, dass der Sand immer aus der Ruhe in das dynamische System tritt, in folgenden: $\mathfrak{P} d\mathfrak{S} - p d\mathfrak{f} - p' d\mathfrak{f}' - p'' d\mathfrak{f}'' - \dots = \frac{1}{2g} (\varphi^2 d\mu + \varphi'^2 d\mu' + \dots)$.

Es kömmt nun blos mehr darauf an, die in dieser Gleichung enthaltenen Grössen, dem vorliegenden Falle gemäss richtig zu substi-

Dampfmaschine sammt Zugehör mit aufladen muss. Eine vielleicht zweckmässigere Methode Wagen zu treiben, ergäbe sich etwa durch Anwendung der Kraft des Pulvers, wobei Federn durch die Explosion des Pulvers gespannt würden, welche dann gleichförmig das Bewegen des Wagens bewürkten. Der Staat hätte dann nur die Anstalt zu treffen, dass längs den Strassen von Strecke zu Strecke Pulver vorräthig läge, welche Einrichtung mit jener der Post viel ähnliches hätte. Herr Hachette führt in dem schon erwähnten Werke über das mechanische Moment des Pulvers Versuche an, welche zu Gunsten meines Vorschlags sprechen.

tuiren. Druckkraft besteht hier keine andere, als jene $\mathfrak{P}$, welche die Pferde nach der Richtung der Zugstränge ausüben, welche Zugstränge mit dem Horizonte einen Winkel $\beta + \psi$ bilden. An Druckwiderständen welche zu überwältigen sind, haben wir das Gewicht des belasteten Wagens ohne Räder $= p$, das Gewicht der Räder $= p'$, das eigene Gewicht der Pferde $= P$; ferner den Widerstand der Reibung $= \rho$ zwischen den Axen und Naben, endlich die Widerstände (parallel zur schiefen Ebene, der Bewegung des Wagens entgegen wirkend) womit (blos statisch) jedes horizontale unendlich dünne Sandstreifchen, deren jedes die Breite b der Radreihe zur Länge hat, gegen das aus dem Fortrollen entstehende Eindrücken widersteht, und welche Streifchen, an jedem Rade vom tiefsten Punkte des Rades an bis an jenen Punkt, bis zu welchem jedes Rad in den Sand dringt, sich wirksam äussern. Wir nennen den Druck des 1ten, jenen des 2ten, jenen des 3ten, ... Streifchens an

beiden Rädern zusammen, $= \lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda'''', \dots$
 $\dots$ Es wird binnen dem Zeitelemente
 dt vom Angriffspunkte der Kraft $\mathfrak{P}$ nach der
Richtung dieser Kraft der Raum $c dt \cos. \psi$
beschrieben; die Angriffspunkte der Wider-
stände p, p', P, ρ , und $\lambda', \lambda'', \lambda''', \dots$
beschreiben zu gleicher Zeit gegen die Rich-
tungen dieser Widerstände die Räume
 $c dt \sin \beta, c dt \sin \beta, c dt \sin \beta, c dt \cdot \frac{r}{R}$,
und $c dt, c dt, c dt, \dots$ wenn r, R
die Halbmesser von Axe und Rad ausdrücken.

In der letzten Gleichung ist $\varphi^2 d\mu + \varphi'^2 d\mu' +$
 $\varphi''^2 d\mu'' + \dots$ die Summe der Produkte
aus denen Quadraten der binnen dt jenen
Sandtheilchen ertheilten Geschwindigkeiten,
welche binnen dt der eingedrückten Theile
der Räder, bei deren Fortrollen, ausweichen
müssen, in die Massen aller dieser Sandtheil-
chen.

Alle die Sandtheilchen erhalten eine Ge-
schwindigkeit c binnen dt , also ist

$$\varphi^2 d\mu + \varphi'^2 d\mu' + \dots = c^2 \cdot \gamma \cdot V,$$

wenn γ das Gewicht der kubischen Einheit des Wegsandcs und V das binnen dt einge-
drückte Sandvolumen ausdrücken. Ist a die
Tiefe der Furchen, und b die Breite beider
Radreifen zusammen, so ist $V = a \cdot c \cdot dt \cdot b$,
daher $\varphi^2 d\mu + \dots = c^3 \cdot b \cdot a \cdot \gamma \cdot dt$.

Es besteht demnach im vorliegenden Falle
die Gleichung $\wp \cdot \cos \psi = (p + p' + P)$
 $\sin \beta = \varphi \cdot \frac{r}{R} = (\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \dots) = \frac{1}{2g} \cdot c^2 \cdot b \cdot a \cdot \gamma$.

Substituirt man (§. 40.) $\wp$ durch $n A \left(\frac{C-c}{C} \right)$,
worin C die grösste Geschwindigkeit des Pfer-
des, A der grösste Druck eines Pferdes, n die
Anzahl der angespannten Pferde, ausdrücken;
ferner P durch nq , worin q das Gewicht
eines Pferdes; ferner p' als eine von den Di-
mensionen p, R , abhängige Funktion, durch
 $F(p, R)$ *); ferner φ durch $[m$ Reibungs-

(*) Anmerkung. Es versteht sich, dass die Kon-
struction der Räder jene seyn müsse, wobei $F(p, R)$
so klein werde, als es die nothwendige Festigkeit er-
laubt.

koeffizient zwischen Axe und Nabe], durch
 $m \sqrt{\mathfrak{P}^2 + p^2 - 2 p \mathfrak{P} \cdot \sin(\beta + \psi)}$; ferner a ,
als eine Funktion des auf die schiefe Ebene
senkrecht ausfallenden Drucks $(p + p') \cos \beta -$
 $\mathfrak{P} \sin \psi$ des Wagens, der Breite b beider
Radreifen, des Radius der zwei Räder R ,
und der die dynamische Beschaffenheit des
Fahrwegbodens bestimmenden Erfahrungskoeffizienten k, k', k'' , durch

$f(k, k', k'', \dots b, R ((p + p') \cos \beta - \mathfrak{P} \sin \psi))$;
endlich $\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \dots$ durch $f(k, k',$
 $k'', \dots, a, b, R)$, und fährt man mit den
Substitutionen der Argumente der hier angegebenen Funktionen so lange fort, bis die Gleichung die möglichst kleinste Anzahl von verschiedenen Buchstaben enthält, so kommt man endlich auf eine Gleichung, woraus sich p , folglich auch $p. c$, bloß mehr durch die Dimensionen $n, g, A, \gamma, C, q, \beta, m, k, k', k'', \dots, c, \psi, r, R, b$, ausdrücken lässt, welche Gleichung wir allgemein so anzeigen: $p. c = F^+(n, g, A, \gamma, C, q, \beta, m, k, k', k'', \dots c, \psi, r, R, b)$. Hier ist n le das

Produkt aus der Ladung des Frachtwagens, (sammt nothwendigem, so leicht wie möglich zu konstruirenden, Behälter der Ladung, welcher hier als *tara* zu betrachten ist) in den Raum, um welchen binnen jeder Zeiteinheit diese Ladung längs der schiefen Ebene fortgerückt wird. Man darf daher den Ausdruck von $p \cdot c$ als jenen des ökonomischen Effekts beim Fuhrwerke betrachten. Die Dimensionen c, ψ, r, R, b , sind daher (so viel es äussere Umstände erlauben) so zu bestimmen, dass bei den gegebenen Dimensionen $g, r, A, C, q, \beta, m, k, k', k'', \dots$, für irgend einen angenommenen Werth von n der Ausdruck von $p \cdot c$ möglichst gross werde. Die Dimension m ist in so ferne als gegeben zu betrachten, als es rücksichtlich der für Axe und Nabe gewählten Materien, und rücksichtlich der gewählten Schmieren, nur bis auf einen bestimmten Grad in unserer Willkühr liegt, den Werth von m zu vermindern.

Eine vollständige Entwicklung der hier;

rücksichtlich des analytischen Ganges, blos angedeuteten Theorie des Fuhrwerks, würde mich von dem Endzwecke dieser Schrift zu weit ablenken.

Nur folgendes will ich noch bemerken: Ist der Frachtwagen horizontal fortzuziehen, und darf man die *Construction* der Räder so zweckmässig annehmen, dass man p' gegen p vernachlässigen kann, so erhält man aus Obigem die Gleichung:

$$I, p. c = \frac{n A}{C} (C - c) c \left(\sin \psi + \frac{R \cos \psi}{r. m} \right) - \\ - (\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \dots) \frac{R c}{r. m} - \frac{b a \gamma R. c^3}{2 g r m}.$$

Lässt sich überdiess der Boden des Weges als vollkommen eben und vollkommen hart annehmen, so erhält man die Gleichung

$$II. p. c. = \frac{n A}{C} (C - c) c \left(\sin \psi + \frac{R \cos \psi}{r m} \right).$$

Bei vollkommen hartem Boden ist es also vortheilhaft $c = \frac{C}{2}$, $\frac{R}{r}$ klein, u. s. w.

zu bestimmen, bei weichem Boden hingegen kann es erforderlich werden, sehr langsam zu fahren u. s. w.

§. 52.

Der im vorigen Paragraphe behandelte Gegenstand gibt mir Gelegenheit, eine neue Art von Fuhrwerk vorzuschlagen, das sich vielleicht mit Vorthail zum Verführen von Kochsalz, Getreide, Pulver, Wolle, Oel, und überhaupt von Flüssigkeiten und solchen Waaren anwenden liesse, welche ohne beträchtliche Zwischenräume zu bilden, sich in einem cylindrischen Gefässe verpacken lassen. Ich nenne dieses Fuhrwerk Cylinderfuhrwerk, und will hievon nur das Wesentlichste anzeigen.

Ich denke mir einen aus Fasstaufeln konstruirten hohlen Cylinder, dessen Durchmesser erst zu bestimmen wäre, dessen Höhe aber der Breite des landesüblichen Geleises gleich kömmt. Dieser Cylinder sey überdiess

wie ein Fass mit zwei Böden versehen, an deren einem jedoch eine zu verschliessende Thüre angebracht sey; endlich besitze dieser Cylinder eine physische Axe, welche zu beiden Böden hervorragt, und dergestalt mit dem Cylinder verbunden ist, dass beim Fortrollen desselben die physische Axe, welche zugleich auch jene des Cylinders ist, sich drehe; die beiden hervorragenden Theile der erwähnten Axe, welche cylindrisch sind, passen in zwei Naben, welche untereinander und mit einer Deichsel dergestalt verbunden sind, dass die ganze Vorrichtung von aussen vollkommen das Ansehen einer Gartenwalze hat, deren man sich in Gärten zum Ebenen der Wege bedient. Die Taufeln möchten allenfalls von aussen durch 2 oder 3, in die Taufeln ganz eingelassene starke eiserne Reifen versehen seyn. Soll nun die Waare verführt werden, so öffnet man die Thüre, verpakt sie fest in den Cylinder, welches in manchen Fällen durch blosses Hineinschütten geschehen könnte, verschliesst die Thüre,

und rolle den Cylinder gleich einer Gartenwalze mittelst an der Deichsel bespannter Pferde fort. Ein wesentlicher Vortheil gegen gewöhnliche Wagen, möchte bei diesem Fuhrwerke darin liegen, dass für einen horizontalen sehr ebenen Weg ohne Stein das Verhältniss des Durchmessers des Cylinders zu jenem der Axe sehr gross gemacht werden könnte, da bei diesem Fuhrwerke nicht wie bei den gewöhnlichen die Ladung auf der Axe ruht, ferner, dass dieser Cylinder bei gleicher Belastung, und übrigens gleichen Umständen, nicht so tief in die Bahn eindringt, als die gewöhnlichen Frachtwagen, und dass also hiedurch einer der grössten Widerstände für den Zug auf horizontalen Chausseen bedeutend vermindert würde. Auch bei einem regelmässig gepflasterten Wege hätte dieses Fuhrwerk einen bedeutenden Vortheil, nämlich jenen, dass es nicht aus den Vertiefungen zwischen jeglichen zwei Steinen, auf deren höchste Punkte gehoben werden müsste, da der Cylinder in seiner

untersten Berührungslinie allemal die Tangente bilden müsste, welche man sich, quer über den Weg, über die Köpfe der Pflastersteine gezogen denken kann.

Das hier vorgeschlagene Fuhrwerk würde nemlich den Vortheil, welchen die breiten Räder der englischen Frachtwägen, sowohl rücksichtlich des Widerstandes als der Erhaltung der Chaussee, gewähren, in einem weit höhern Grade leisten. Indess tritt hier der üble Umstand ein, itens, dass mit diesem Fuhrwerke nicht alle Gattungen von Gegenständen ganz transportirt werden können, itens, dass, wegen der nothwendigen Festigkeit der Cylinderwand und der Böden, das Verhältniss der mitzuschleppenden *Thara* gegen die Ladung in allen jenen Fällen zu gross wird, wo die verpackte Waare nicht ein beträchtliches spezifisches Gewicht hat. Dieser letzte Umstand macht, dass dieses Fuhrwerk mit Vortheil nur da angewandt werden könnte, wo die Strasse beinahe in

ihrer 'ganzen Länge ganz horizontal fortliefe; ferner dass vorzüglich dabei auf eine leichte Constructions - Methode des Cylinders Rücksicht genommen werden müsste.

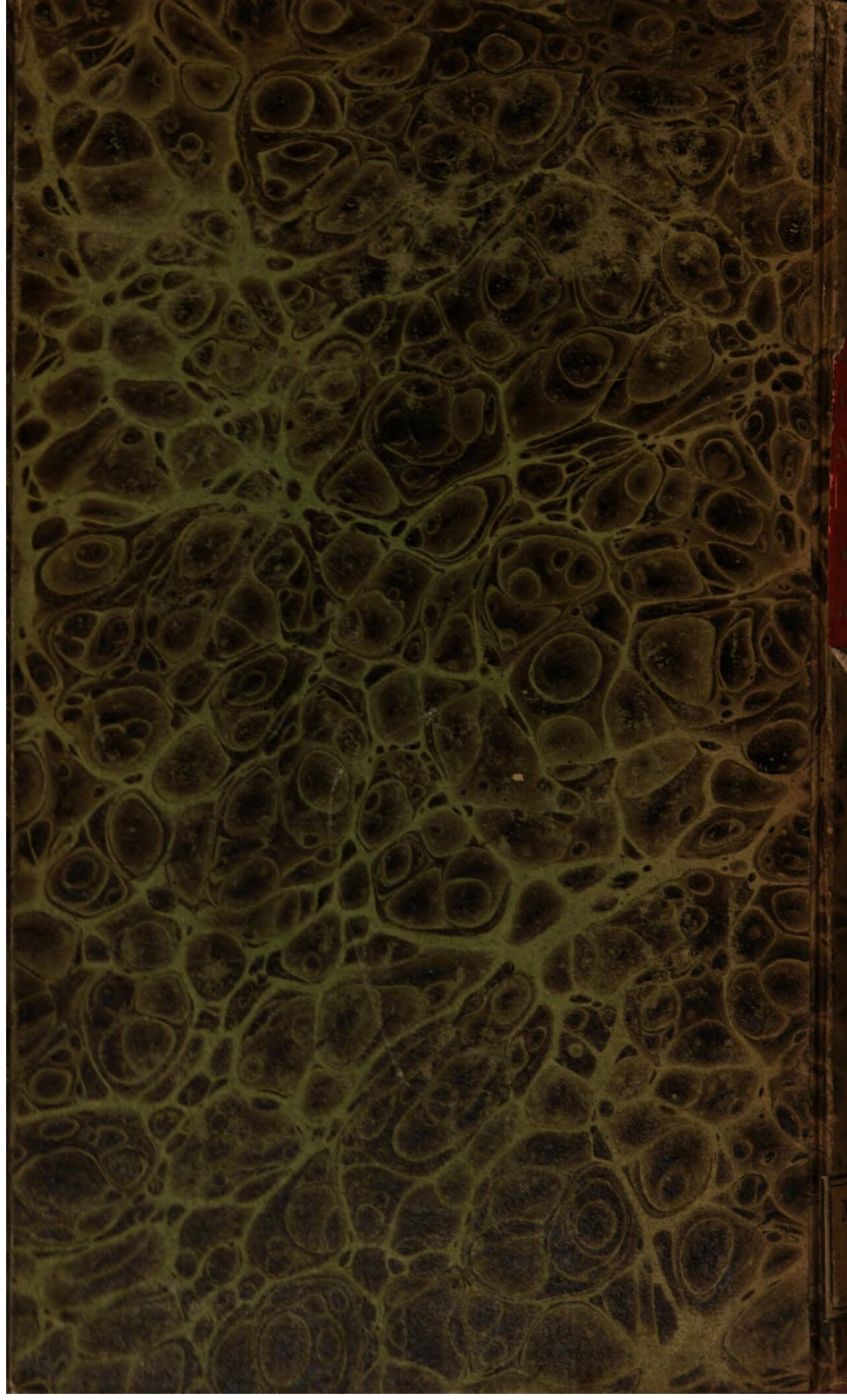
Es versteht sich, dass von dem hier gemachten Vorschlage in jenen Fällen keine Rede seyn kann, wo glückliche Umstände entweder die Staatsregierung, oder Gesellschaften in den Stand setzen, Handlungsorte mit einander durch Kanäle oder Eisenbahnen in Verbindung zu setzen. Indess sind die Fälle sehr häufig, wo diese wünschenswerthen, die Industrie so sehr belebenden Anstalten entweder nicht getroffen werden wollen, es auch zum Theil wegen Geldmangel, schwankenden politischen Verhältnissen u. s. w. nicht können. Auch liesse sich für den Transport eine Vorrichtung denken bei welcher zwei Cylinder hinter einander in einer gewissen Entfernung von einander abstehend, mit einander in Verbindung ständen, und wo in dem erwähnten Zwischenraume der obere Theil eines Frachtwagens mit-

telst Friktionsräder auf den Axen der Cylinder ruhen möchte. (S. Fig. 3.)

§. 53.

Da in meiner analytischen Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten §. 33. das Wichtigste über die Theorie des Krummzapfens und der Kurbel, ferner §. 39. das Wesentlichste über die Theorie des Stosses mit einer Anwendung auf die Wirkung der Raumaschine vorgetragen worden, so erwähne ich hier dieser Gegenstände weiter nicht.

Michael Fuchs.



Buquoy, Georg <<von>>,

Weitere Entwicklung und Anwendung des Gesetzes der virtuellen
Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht

Bd.: 1

Leipzig (1814)

Math.a. 53 n-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080609-2